WIELKI MATEMATYK

Zobacz, jak dojść do wyniku w każdym zadaniu

Matura z matematyki, poziom podstawowy · sierpień 2017 · formuła 2015

Ten plik to oficjalne odpowiedzi i zasady oceniania CKE. Na wielkimatematyk.pl każde zadanie z tego arkusza ma podpowiedzi i rozwiązanie rozpisane na małe kroki, więc łatwo sprawdzisz, w którym miejscu pojawił się błąd.

Zeskanuj kod telefonem

albo kliknij adres:

wielkimatematyk.pl/matura-matematyka-podstawowa/formula-2015/2017/sierpien/

Chcesz poćwiczyć więcej?

Generator arkuszy na wielkimatematyk.pl losuje zadania egzaminacyjne z wybranych działów i drukuje je razem z kluczem odpowiedzi.

wielkimatematyk.pl/matura-matematyka-podstawowa/

Pozostałe strony tego pliku to oryginalny dokument Centralnej Komisji Egzaminacyjnej (cke.gov.pl), bez żadnych zmian. Tę stronę dodał serwis wielkimatematyk.pl.

CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2016/2017

FORMUŁA OD 2015 i DO 2014
(„NOWA MATURA” i „STARA MATURA”)

MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1

SIERPIEŃ 2017

Zadania zamknięte

Punkt przyznaje się za wskazanie poprawnej odpowiedzi.

Nr zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odp.	C	C	B	D	A	D	A	D	A	A	C	B	B	D	C	C	C	A	B	A	A	B	B	D	D

Ogólne zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $2x^2+x-6\le 0$.

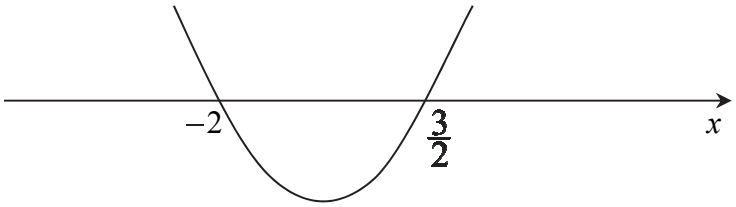
Przykładowe rozwiązanie
Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap rozwiązania polega na wyznaczeniu pierwiastków trójmianu kwadratowego $2x^2+x-6$.
Na przykład obliczamy wyróżnik tego trójmianu, a następnie stosujemy wzory na pierwiastki:

$$\Delta=7^2,\ x_1=\frac{-1-7}{4}=-2,\ x_2=\frac{-1+7}{4}=\frac{3}{2}.$$

Drugi etap rozwiązania polega na wyznaczeniu zbioru rozwiązań nierówności $2x^2+x-6\le 0$.

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $-2\le x\le\frac{3}{2}$ lub $\left\langle -2,\frac{3}{2}\right\rangle$ lub $x\in\left\langle -2,\frac{3}{2}\right\rangle$, np. odczytując go ze szkicu wykresu funkcji $f(x)=2x^2+x-6$.



Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1=-2$, $x_2=\frac{3}{2}$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

- zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x)=2x^2+x-6$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

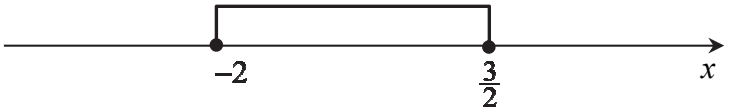
- realizując pierwszy etap błędnie wyznaczy pierwiastki (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np. popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje .....2 p.
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $-2 \le x \le \frac{3}{2}$ lub $\left\langle -2, \frac{3}{2} \right\rangle$ lub $x \in \left\langle -2, \frac{3}{2} \right\rangle$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Uwagi

1. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeśli zdający wyznacza ujemną deltę trójmianu kwadratowego, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

1. Akceptujemy sytuację, gdy zdający poprawnie obliczy lub poda pierwiastki trójmianu $x_1=-2$, $x_2=\frac{3}{2}$ i zapisze, np. $x \in \left\langle -2, -\frac{3}{2} \right\rangle$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \in \left\langle \frac{3}{2}, -2 \right\rangle$, to przyznajemy **2 punkty**.

Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż równanie $\left(x^2-6\right)\left(3x+2\right)=0$.

Przykładowe rozwiązanie

Lewa strona równania jest iloczynem dwóch czynników x^2-6 oraz $3x+2$. Zatem iloczyn ten jest równy 0, gdy co najmniej jeden z tych czynników jest równy 0, czyli

$$x^2-6=0 \text{ lub } 3x+2=0.$$

Rozwiązaniem równania $3x+2=0$ jest $x=-\frac{2}{3}$.

Rozwiązania równania $x^2-6=0$ możemy wyznaczyć, korzystając:

- z postaci iloczynowej trójmianu x^2-6 (wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów)
  $\left(x-\sqrt{6}\right)\left(x+\sqrt{6}\right)=0$, stąd $x=\sqrt{6}$ lub $x=-\sqrt{6}$

albo

- ze wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego:
  $\Delta=24$,
  $x_1=\frac{0-2\sqrt{6}}{2}=-\sqrt{6}$, $x_2=\frac{0+2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$,

albo

- z własności wartości bezwzględnej, przekształcając najpierw równanie do postaci równoważnej $|x|=\sqrt{6}$, skąd $x=\sqrt{6}$ lub $x=-\sqrt{6}$.

Zatem wszystkie rozwiązania równania to: $x=-\frac{2}{3}$ lub $x=\sqrt{6}$, lub $x=-\sqrt{6}$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.
gdy:

- zapisze dwa równania: $x^2-6=0$ lub $3x+2=0$ (wystarczy, że z rozwiązania wynika, że zdający wyznacza pierwiastki każdego z wielomianów: x^2-6 oraz $3x+2$)

albo

- zapisze rozwiązanie $x=-\frac{2}{3}$,

albo

- wyznaczy dwa pierwiastki wielomianu x^2-6,

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ..... 2 p.
gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x=-\frac{2}{3}$ lub $x=\sqrt{6}$, lub $x=-\sqrt{6}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający zapisuje zamiast znaku = znak ≠ i zamieszcza zapisy typu: $x^2 - 6 \neq 0$ lub $3x + 2 \neq 0$, to oznacza, że podejmuje próbę wyznaczenia miejsc zerowych dwóch wielomianów i otrzymuje przynajmniej **1 punkt**.

2. Jeżeli zdający nie zapisuje warunku $x^2 - 6 = 0$, ale pisze od razu błędną postać iloczynową $x^2 - 6$, np. $(x - 3)(x - 2) = 0$, $(x - 6)(x + 6) = 0$, i nie wyznacza poprawnie miejsca zerowego drugiego wielomianu, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 28. (0–2)

Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$4x + \frac{1}{x} \geq 4 .$$

Przykładowe rozwiązanie

I sposób rozwiązania

Dla dodatnich liczb x nierówność $4x + \frac{1}{x} \geq 4$ jest równoważna kolejno nierównościom

$$4x^2 + 1 \geq 4x ,$$
$$4x^2 - 4x + 1 \geq 0 ,$$
$$(2x - 1)^2 \geq 0 .$$

Ta nierówność jest prawdziwa, gdyż lewa strona tej nierówności jest kwadratem liczby rzeczywistej. To kończy dowód.

II sposób rozwiązania

Dla dodatnich liczb x nierówność $4x + \frac{1}{x} \geq 4$ jest równoważna kolejno nierównościom

$$4x - 4 + \frac{1}{x} \geq 0 ,$$
$$\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0$$

Ta nierówność jest prawdziwa, gdyż lewa strona tej nierówności jest kwadratem liczby rzeczywistej. To kończy dowód.

III sposób rozwiązania

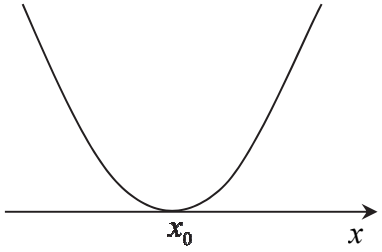
Dla dodatnich liczb x nierówność $4x + \frac{1}{x} \geq 4$ jest równoważna kolejno nierównościom

$$4x^2 + 1 \geq 4x ,$$
$$4x^2 - 4x + 1 \geq 0 .$$

Ponieważ wyróżnik trójmianu kwadratowego $4x^2 - 4x + 1$ jest równy $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$ i współczynnik przy x^2 jest dodatni, więc nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x. To kończy dowód.

Uwaga

Możemy też naszkicować wykres tego trójmianu $y = 4x^2 - 4x + 1$.



IV sposób rozwiązania

Z twierdzenia o średniej arytmetycznej i geometrycznej dla liczb dodatnich $4x$ i $\frac{1}{x}$ wynika, że prawdziwa jest nierówność

$$\frac{4x+\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{4x \cdot \frac{1}{x}} = 2 .$$

Stąd otrzymujemy $4x+\frac{1}{x} \geq 4$. To kończy dowód.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.

gdy:

- przekształci poprawnie nierówność do postaci $(2x-1)^2 \geq 0$

albo

- przekształci poprawnie nierówność do postaci $\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0$,

albo

- przekształci poprawnie nierówność do postaci $4x^2-4x+1 \geq 0$ i obliczy wyróżnik trójmianu $4x^2-4x+1$: $\Delta = 0$

albo

- obliczy pochodną funkcji $f(x)=4x+\frac{1}{x}$ i wykaże, że dla $x=\frac{1}{2}$ funkcja f osiąga minimum lokalne

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ..... 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwaga

Jeżeli zdający sprawdzi prawdziwość tezy tylko dla konkretnych przypadków, to otrzymuje **0 punktów**.

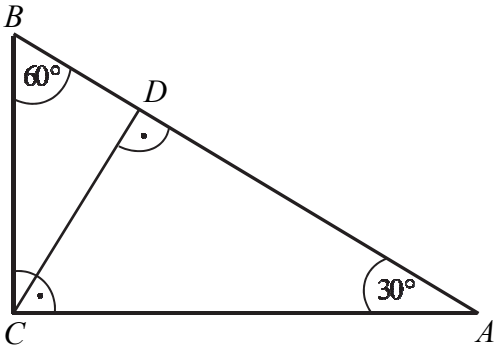
Zadanie 29. (0–2)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90°$ i $|\sphericalangle ABC| = 60°$. Niech D oznacza punkt wspólny wysokości poprowadzonej z wierzchołka C kąta prostego i przeciwprostokątnej AB tego trójkąta. Wykaż, że $|AD| : |DB| = 3 : 1$.

Przykładowe rozwiązania

I sposób rozwiązania

Sporządzamy pomocniczy rysunek ilustrujący treść zadania.



Ponieważ $|\sphericalangle ABC| = 60°$, więc $|BC| = \frac{1}{2}|AB|$. Podobnie, ponieważ $|\sphericalangle DBC| = 60°$, więc $|DB| = \frac{1}{2}|BC|$. Otrzymujemy zatem ciąg równości

$$|DB| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|AB|\right) = \frac{1}{4}|AB|.$$

Zatem $|AD| = \frac{3}{4}|AB|$. Stąd wynika, że $|AD| : |DB| = \frac{3}{4}|AB| : \frac{1}{4}|AB| = 3 : 1$. To kończy dowód.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .....1 p.

gdy zauważy i zapisze, że

$$|BC| = \frac{1}{2}|AB| \quad \text{i} \quad |DB| = \frac{1}{2}|BC|$$

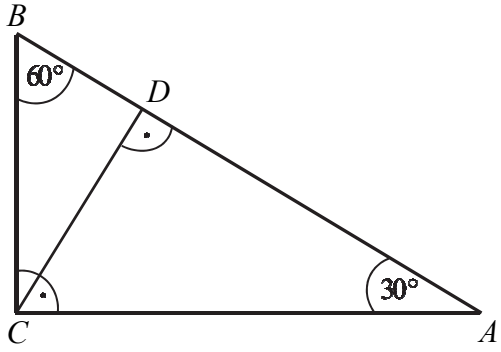
i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .....2 p.

gdy przeprowadzi pełne, poprawne rozumowanie.

II sposób rozwiązania

Sporządzamy pomocniczy rysunek ilustrujący treść zadania.



Z trójkątów prostokątnych ADC i BDC otrzymujemy równości

$$\operatorname{tg}30^\circ = \frac{|CD|}{|AD|} \text{ i } \operatorname{tg}60^\circ = \frac{|CD|}{|DB|},$$

czyli równości

$$|CD| = \frac{\sqrt{3}}{3}|AD| \text{ i } |CD| = \sqrt{3}|DB|.$$

Porównujemy prawe strony obu równań i zapisujemy równanie

$$\frac{\sqrt{3}}{3}|AD| = \sqrt{3}|DB|,$$

równoważne równaniu

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 3.$$

Otrzymana równość oznacza tezę twierdzenia.

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.

gdy zauważy i zapisze, że

$$|CD| = \frac{\sqrt{3}}{3}|AD| \text{ i } |CD| = \sqrt{3}|DB|$$

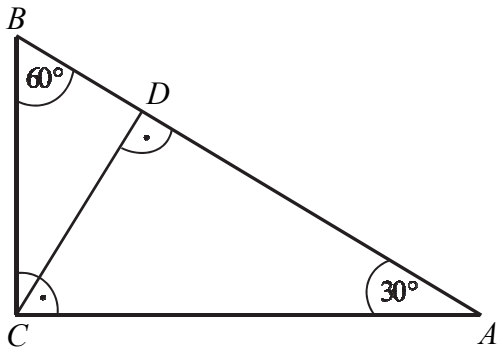
i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ..... 2 p.

gdy przeprowadzi pełne, poprawne rozumowanie.

III sposób rozwiązania

Sporządzamy pomocniczy rysunek ilustrujący treść zadania.



Niech $|AC| = b$. Wtedy w trójkącie ACD mamy:

$$|CD| = \frac{b}{2} \text{ i } |AD| = \frac{b\sqrt{3}}{2}.$$

Ponadto, w trójkącie ABC:

$$|BC| = \frac{b\sqrt{3}}{3}.$$

Ponieważ $|\sphericalangle DBC| = 60^\circ$, więc $|DB| = \frac{b\sqrt{3}}{6}$. Zatem $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{b\sqrt{3}}{2} : \frac{b\sqrt{3}}{6} = 3$.

To kończy dowód.

Schemat punktowania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .....1 p.
gdy zapisze długość odcinków *AD* i *DB* w zależności od długości odcinka *AC*, np. oznaczy $|AC|=b$ i zapisze długości odcinków AD i DB w zależności od b:

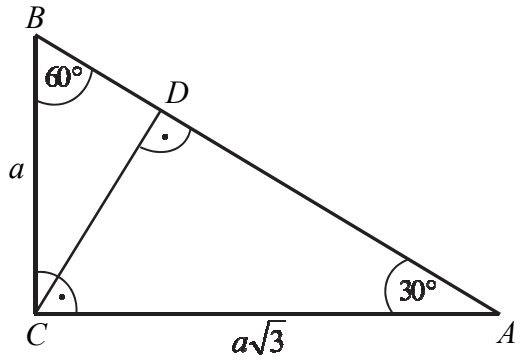
$$|AD|=\frac{b\sqrt{3}}{2} \text{ i } |DB|=\frac{b\sqrt{3}}{6}$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .....2 p.
gdy przeprowadzi pełne, poprawne rozumowanie.

IV sposób rozwiązania

Niech $|BC|=a$. Ponieważ trójkąt *ABC* jest połową trójkąta równobocznego, więc $|AC|=a\sqrt{3}$.



Trójkąty *ADC* i *CDB* są podobne, a skala ich podobieństwa jest równa $\frac{|AC|}{|BC|}=\frac{a\sqrt{3}}{a}=\sqrt{3}$, więc stosunek pól tych trójkątów jest kwadratem tej skali, czyli $\frac{P_{ADC}}{P_{CDB}}=\left(\sqrt{3}\right)^2=3$. Te trójkąty mają wspólną wysokość *CD*, więc stosunek ich pól jest równy stosunkowi długości ich podstaw, czyli $\frac{P_{ADC}}{P_{CDB}}=\frac{|AD|}{|BD|}=3$ co kończy dowód.

Schemat punktowania IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .....1 p.
gdy zapisze, że trójkąty *ADC* i *CDB* są podobne, obliczy stosunek pól tych trójkątów i zapisze, że *CD* jest wspólną wysokością tych trójkątów i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .....2 p.
gdy przeprowadzi pełne, poprawne rozumowanie.

Uwagi

1. Jeżeli zdający sprawdzi prawdziwość tezy tylko dla konkretnych przypadków, to otrzymuje **0 punktów**. Uwaga ta nie dotyczy sytuacji, gdy zdający zapisuje stosowną własność: podobieństwo trójkątów o kątach $30°$, $60°$, $90°$.

2. Jeżeli zdający ustali, że długości odcinków są równe: $BD = x$, $BC = 2x$, $AB = 4x$ lub $BD = x$, $BC = 2x$, $AD = 3x$ i nie towarzyszą tym ustaleniom zapisy świadczące o błędnym rozumowaniu, to może otrzymać **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający przeprowadzi uzasadnienie, rozważając konkretne długości odcinków i zapisze, że ze względu na podobieństwo figur teza jest prawdziwa dla dowolnych długości boków, spełniających podane warunki, to może otrzymać **2 punkty**.

Zadanie 30. (0–2)

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 4, 5, 10\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że iloraz pierwszej wylosowanej liczby przez drugą wylosowaną liczbę jest liczbą całkowitą.

Przykładowe rozwiązania

I sposób rozwiązania („metoda klasyczna”)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary uporządkowane (x, y) liczb ze zbioru $\{1, 2, 4, 5, 10\}$. Jest to model klasyczny. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 5 \cdot 5 = 25$.

Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$(1,1), (2,1), (4,1), (5,1), (10,1), (2,2), (4,2), (10,2), (4,4), (5,5), (10,5), (10,10)$

Zatem $|A| = 12$ i stąd $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12}{25} = 0,48$.

II sposób rozwiązania („metoda tabeli”)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary uporządkowane (x, y) liczb ze zbioru $\{1, 2, 4, 5, 10\}$. Jest to model klasyczny. Budujemy tabelę ilustrującą sytuację opisaną w zadaniu.

		I losowanie				
		1	**2**	**4**	**5**	**10**
II losowanie	**1**	×	×	×	×	×
	2		×	×		×
	4			×		
	5				×	×
	10					×

Symbolem × oznaczono zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A. Mamy więc 25, wszystkich zdarzeń elementarnych, czyli $|\Omega| = 25$, oraz 12 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, czyli $|A| = 12$. Stąd $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12}{25} = 0,48$.

Schemat punktowania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .....1 p.

gdy

- obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych $|\Omega| = 25$

albo

- przedstawi poprawny sposób wyznaczenia wszystkich elementów zbioru A lub wypisze wszystkie te zdarzenia elementarne:
  $(1,1), (2,1), (4,1), (5,1), (10,1), (2,2), (4,2), (10,2), (4,4), (5,5), (10,5), (10,10)$

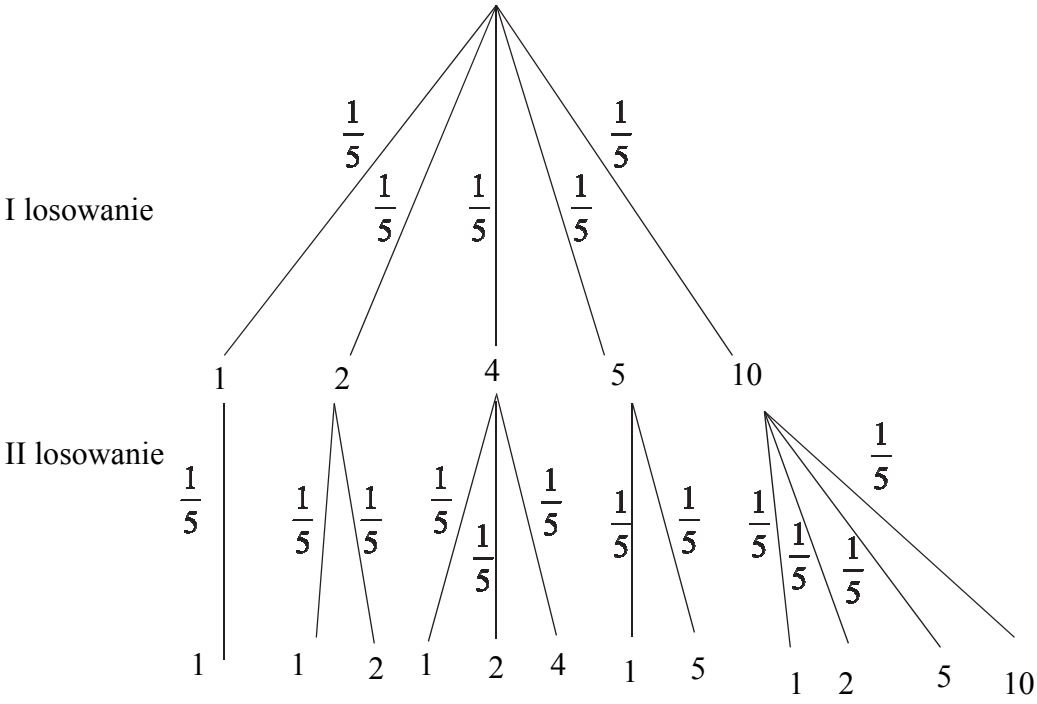
i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .....2 p.

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12}{25} = 0,48$.

III sposób rozwiązania („metoda drzewa”)

Drzewo z istotnymi gałęziami



$P(A) = 12 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{12}{25} = 0,48$.

Schemat punktowania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.

gdy narysuje drzewo uwzględniające wszystkie istotne gałęzie i zapisze poprawne prawdopodobieństwo przynajmniej przy jednej gałęzi.

Zdający otrzymuje ..... 2 p.

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A)=12\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{12}{25}=0,48$.

Uwagi

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A)>1$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**.

2. Jeżeli zdający poprawnie obliczy prawdopodobieństwo w sytuacji rozważania losowania bez zwracania i uzyska wynik $\frac{7}{20}$, to może otrzymać **1 punkt**.

3. Jeżeli zdający przy opisie elementów zbioru A zmienia kolejność liczb i pisze na przykład (1, 2) zamiast (2, 1), to może otrzymać **2 punkty**.

Zadanie 31. (0–2)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), określony dla $n\geq 1$, w którym spełniona jest równość $a_{21}+a_{24}+a_{27}+a_{30}=100$. Oblicz sumę $a_{25}+a_{26}$.

Przykładowe rozwiązanie

Ponieważ w zadaniu należy obliczyć sumę $a_{25}+a_{26}$, więc zapiszemy daną równość $a_{21}+a_{24}+a_{27}+a_{30}=100$ w postaci równoważnej

$$a_{25}-4r+a_{25}-r+a_{26}+r+a_{26}+4r=100,$$

gdzie r oznacza odpowiednio różnicę danego ciągu. Stąd wynika, że

$$a_{25}+a_{26}=50.$$

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.

gdy:

- zapisze równość $a_{21}+a_{24}+a_{27}+a_{30}=100$ w postaci równoważnej $a_{25}-4r+a_{25}-r+a_{26}+r+a_{26}+4r=100$ lub $4a_1+98r=100$, lub $2a_1+49r=50$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

albo

- zapisze, że $a_{25}+a_{26}=a_1+24r+a_1+25r=2a_1+49r$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy,

albo

- popełni błąd rachunkowy w przekształcaniu równości $a_{21}+a_{24}+a_{27}+a_{30}=100$ do postaci równoważnej i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy sumę $a_{25}+a_{26}$.

Zdający otrzymuje ..... 2 p.
gdy obliczy i zapisze, że $a_{25}+a_{26}=50$.

Uwagi
1. Jeżeli zdający zapisze równość $a_{21}+a_{24}+a_{27}+a_{30}=100$ w postaci równoważnej $4a_1+98r=100$, a następnie wprowadzi konkretne wartości liczbowe do równania z dwiema niewiadomymi, np. $r=1$, i nawet poprawnie obliczy $a_{25}+a_{26}$, to otrzymuje **1 punkt** za takie rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający myli własności ciągu arytmetycznego z własnościami ciągu geometrycznego, to za całe zadanie otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający rozważa wyłącznie konkretne ciągi i nie podaje stosownego uzasadnienia na temat zastosowania tych rozważań do sytuacji ogólnej, to otrzymuje **0 punktów**.
4. Jeżeli zdający zapisuje wyłącznie $a_{25}+a_{26}=50$, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 32. (0–4)

Funkcja kwadratowa $f(x)=ax^2+bx+c$ ma dwa miejsca zerowe $x_1=-2$ i $x_2=6$. Wykres funkcji *f* przechodzi przez punkt $A=(1,-5)$. Oblicz najmniejszą wartość funkcji *f*.

Przykładowe rozwiązania

I sposób rozwiązania
Ponieważ znamy miejsca zerowe funkcji kwadratowej, to możemy zapisać wzór funkcji *f* w postaci iloczynowej $f(x)=a(x-6)(x+2)$.
Wykres tej funkcji przechodzi przez punkt $A=(1,-5)$, więc otrzymujemy równanie

$$-5=a(1-6)(1+2),$$
$$-5=-15a,$$
$$a=\frac{1}{3}.$$

Funkcja określona jest wzorem: $f(x)=\frac{1}{3}(x-6)(x+2)$.
Najmniejsza wartość jest przyjmowana przez funkcję *f* dla argumentu x_0, który jest średnią arytmetyczną miejsc zerowych tej funkcji.
Wyznaczamy x_0 i najmniejszą wartość funkcji $f(x_0)$:

$$x_0=\frac{6-2}{2}=2,\ f(x_0)=f(2)=\frac{1}{3}(2-6)(2+2)=-\frac{16}{3}.$$

II sposób rozwiązania

Z treści zadania wynika, że możemy zapisać układ trzech równań:

$$\begin{cases} a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c=0 \\ a\cdot 6^2+b\cdot 6+c=0 \\ a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=-5 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{4}{3}$ i $c=-4$.

Stąd wynika, że funkcja f określona jest wzorem: $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x-4$.

Funkcja ta przyjmuje najmniejszą wartość dla argumentu $x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{\frac{4}{3}}{2\cdot\frac{1}{3}}=2$.

Obliczamy najmniejszą wartość funkcji: $f(2)=\frac{1}{3}\cdot 2^2-\frac{4}{3}\cdot 2-4=-\frac{16}{3}$.

Uwaga

Po obliczeniu współczynników *a*, *b* i *c* możemy najmniejszą wartość funkcji obliczyć ze wzoru $q=-\frac{\Delta}{4a}$. Wtedy otrzymujemy

$$f_{\min}=-\frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^2-4\cdot\frac{1}{3}\cdot(-4)}{4\cdot\frac{1}{3}}=-\frac{\frac{16}{9}+\frac{16}{3}}{\frac{4}{3}}=-\frac{16}{3}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.

Zdający

- obliczy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli: $p=2$

albo

- zapisze wzór funkcji *f* w postaci iloczynowej, z jednym nieznanym współczynnikiem: $f(x)=a(x-6)(x+2)$,

albo

- zapisze trzy równania, w których niewiadomymi są współczynniki *a*, *b*, *c* trójmianu kwadratowego:

$$a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c=0$$
$$a\cdot 6^2+b\cdot 6+c=0$$
$$a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=-5$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.

Zdający

- zapisze wzór funkcji *f* w postaci iloczynowej, z jednym nieznanym współczynnikiem: $f(x)=a(x-6)(x+2)$ i obliczy wartość *a*: $a=\frac{1}{3}$

albo

- obliczy współczynniki trójmianu kwadratowego: $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{4}{3}$ i $c=-4$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.
Zdający

- obliczy współczynniki trójmianu kwadratowego: $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{4}{3}$ i $c=-4$ oraz obliczy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli: $p=2$

albo

- obliczy współczynniki trójmianu kwadratowego: $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{4}{3}$ i $c=-4$ oraz zapisze, że najmniejsza wartość funkcji jest równa $-\frac{\Delta}{4a}$ oraz obliczy $\Delta=\left(-\frac{4}{3}\right)^2-4\cdot\frac{1}{3}\cdot(-4)$

albo

- zapisze wzór funkcji f w postaci iloczynowej, z jednym nieznanym współczynnikiem: $f(x)=a(x-6)(x+2)$ i obliczy wartość a: $a=\frac{1}{3}$ oraz obliczy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli: $p=2$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne ..... 4 p.

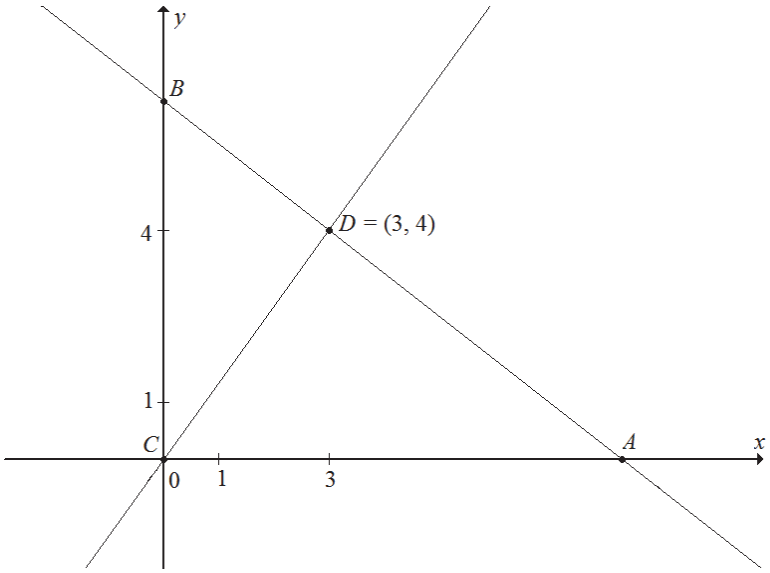
Zdający obliczy najmniejszą wartość funkcji f: $-\frac{16}{3}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający popełni błędy (rachunkowe, w przepisywaniu), które nie przekreślają poprawności rozumowania i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za takie rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający przyjmuje konkretna wartość $a > 0$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający przy wyznaczaniu a popełnia błąd rachunkowy i otrzymuje $a > 0$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający przy wyznaczaniu a popełnia błąd rachunkowy i otrzymuje $a < 0$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

Zadanie 33. (0–4)

Punkt $C=(0,0)$ jest wierzchołkiem trójkąta prostokątnego ABC, którego wierzchołek A leży na osi Ox, a wierzchołek B na osi Oy układu współrzędnych. Prosta zawierająca wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka C przecina przeciwprostokątną AB w punkcie $D=(3,4)$.



Oblicz współrzędne wierzchołków A i B tego trójkąta oraz długość przeciwprostokątnej AB.

Przykładowe rozwiązania

I sposób rozwiązania

Współczynnik kierunkowy prostej CD jest równy

$$a_{CD}=\frac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\frac{4-0}{3-0}=\frac{4}{3}.$$

Prosta AB jest prostopadła do prostej CD, więc jej współczynnik kierunkowy jest równy

$$a_{AB}=-\frac{3}{4}.$$

Prosta ta przechodzi przez punkt $D=(3,4)$, więc jej równanie ma postać

$$y=-\frac{3}{4}(x-3)+4,$$

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}.$$

Ponieważ prosta AB przecina oś Oy w punkt B, więc $B=\left(0,\frac{25}{4}\right)$, natomiast oś Ox w punkcie A, więc $A=(x_A,0)$. Zatem

$$0=-\frac{3}{4}x_A+\frac{25}{4},$$

$$x_A=\frac{25}{3},$$

czyli $A=\left(\frac{25}{3},0\right)$.

Długość przeciwprostokątnej AB jest zatem równa

$$|AB| = \sqrt{\left(\frac{25}{3}-0\right)^2 + \left(0-\frac{25}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{625}{9}+\frac{625}{16}} = \sqrt{625\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\right)} =$$

$$= \sqrt{625\cdot\frac{25}{9\cdot 16}} = 25\cdot\frac{5}{3\cdot 4} = \frac{125}{12} = 10\frac{5}{12}.$$

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.

Zdający zapisze współczynnik kierunkowy prostej CD: $a_{CD} = \frac{4}{3}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.

Zdający zapisze równanie prostej AB: $y = -\frac{3}{4}(x-3)+4$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.

Zdający obliczy współrzędne punktów A i B: $A = \left(\frac{25}{3},0\right)$, $B = \left(0,\frac{25}{4}\right)$.

Rozwiązanie pełne ..... 4 p.

Zdający obliczy długość przeciwprostokątnej AB trójkąta ABC: $|AB| = 10\frac{5}{12}$.

II sposób rozwiązania

Niech $A = (x_A, 0)$ i $B = (0, y_B)$. Długość odcinka CD jest równa

$$|CD| = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 5.$$

Z twierdzenia dla trójkątów ACD i BDC otrzymujemy

$$|AD|^2 + |CD|^2 = |AC|^2 \text{ i } |CD|^2 + |BD|^2 = |BC|^2,$$

$$\left(\sqrt{(3-x_A)^2 + (4-0)^2}\right)^2 + 5^2 = {x_A}^2 \text{ i } \left(\sqrt{(3-0)^2 + (4-y_B)^2}\right)^2 + 5^2 = {y_B}^2,$$

$$9 - 6x_A + {x_A}^2 + 16 + 25 = {x_A}^2 \text{ i } 9 + 16 - 8y_B + {y_B}^2 + 25 = {y_B}^2,$$

$$50 = 6x_A \text{ i } 50 = 8y_B,$$

$$x_A = \frac{50}{6} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3} \text{ i } y_B = \frac{50}{8} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}.$$

Zatem $A = \left(\frac{25}{3},0\right)$ i $B = \left(0,\frac{25}{4}\right)$.

Długość przeciwprostokątnej AB jest zatem równa

$$|AB| = \sqrt{\left(\frac{25}{3}-0\right)^2 + \left(0-\frac{25}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{625}{9}+\frac{625}{16}} = \sqrt{625\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\right)} =$$

$$= \sqrt{625\cdot\frac{25}{9\cdot 16}} = 25\cdot\frac{5}{3\cdot 4} = \frac{125}{12} = 10\frac{5}{12}.$$

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.

Zdający zapisze jedno z równań: $\left(\sqrt{(3-x_A)^2+(4-0)^2}\right)^2+5^2=x_A{}^2$,

$\left(\sqrt{(3-0)^2+(4-y_B)^2}\right)^2+5^2=y_B{}^2$ z niewiadomą odpowiednio x_A, y_B

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.

Zdający zapisze oba równania: $\left(\sqrt{(3-x_A)^2+(4-0)^2}\right)^2+5^2=x_A{}^2$,

$\left(\sqrt{(3-0)^2+(4-y_B)^2}\right)^2+5^2=y_B{}^2$ z niewiadomą odpowiednio x_A, y_B

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.

Zdający obliczy współrzędne punktów A i B: $A=\left(\frac{25}{3},0\right)$, $B=\left(0,\frac{25}{4}\right)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne ..... 4 p.

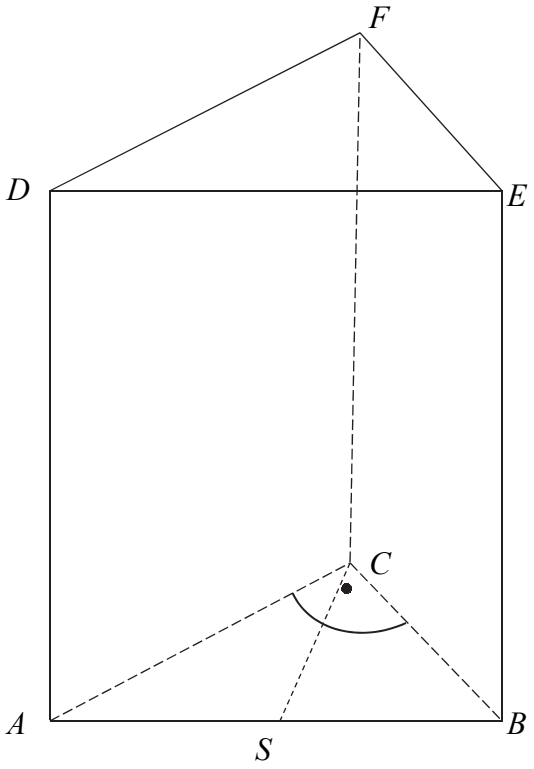
Zdający obliczy długość przeciwprostokątnej AB trójkąta ABC: $|AB|=10\frac{5}{12}$.

Uwaga (do schematów punktowania I i II sposobu rozwiązania)

Jeżeli zdający popełni błędy (rachunkowe, w przepisywaniu), które nie przekreślają poprawności rozumowania i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za takie rozwiązanie.

Zadanie 34. (0–5)

Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDEF$ jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90°$ (zobacz rysunek). Stosunek długości przyprostokątnej AC tego trójkąta do długości przyprostokątnej BC jest równy 4 : 3. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, a długość odcinka SC jest równa 5. Pole ściany bocznej $BEFC$ graniastosłupa jest równe 48. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



Przykładowe rozwiązanie

Odcinek CS jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Zatem

$$|CS| = |AS| = |BS| = 5,$$

skąd otrzymujemy $|AB| = 10$.

Ponieważ stosunek długości przyprostokątnej AC do długości przyprostokątnej BC jest równy 4 : 3, więc możemy przyjąć $|AC| = 4x$ oraz $|BC| = 3x$, gdzie x oznacza współczynnik proporcjonalności. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie

$$10^2 = (4x)^2 + (3x)^2,$$

$$100 = 25x^2,$$

$$x^2 = 4,$$

$$x = 2.$$

Zatem $|AB| = 8$ oraz $|BC| = 6$. Pole trójkąta ABC jest równe $P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$.

Pole ściany bocznej $BEFC$ jest równe 48, więc

$|BC| \cdot H = 48$, gdzie $|BE| = H$ to wysokość graniastosłupa.

$$6 \cdot H = 48,$$

$$H = 8.$$

Objętość graniastosłupa jest równa $V = P_p \cdot H = 24 \cdot 8 = 192$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.

Zdający

- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta ABC: $|AB|=10$

albo

- zapisze zależność między długościami przyprostokątnych trójkąta ABC, np.:
  $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$ lub ($|AC|=4x$ i $|BC|=3x$)

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny ..... 2 p.

Zdający zapisze

- równanie pozwalające obliczyć długości przyprostokątnych, np.: $(3x)^2+(4x)^2=10^2$

albo

- układ równań pozwalający obliczyć długości przyprostokątnych, np.:
  $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$ i $a^2+b^2=10^2$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.

Zdający obliczy długości boków trójkąta ABC: $|AB|=10$, $|AC|=8$, $|BC|=6$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Uwaga

Akceptujemy rozwiązanie, w którym zdający wykorzystuje trójkę pitagorejską (6, 8, 10).

Rozwiązanie prawie pełne ..... 4 p.

Zdający

- nie obliczy objętości bryły, ale obliczy wysokość graniastosłupa: $H=8$

albo

- obliczy objętość graniastosłupa, popełniając w trakcie rozwiązania błędy rachunkowe.

Rozwiązanie pełne ..... 5 p.

Zdający obliczy objętość graniastosłupa: $V=192$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający rozważa w podstawie graniastosłupa trójkąt inny niż do trójkąta o bokach 6, 8, 10, ale podobny do tego trójkąta o bokach 6, 8, 10, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

2. Jeżeli zdający rozkłada liczbę 48 na iloczyn $8 \cdot 6$ i przyjmuje, że 6 jest długością BC, a następnie wyznacza pole podstawy i objętość bryły, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.