WIELKI MATEMATYK

Zobacz, jak dojść do wyniku w każdym zadaniu

Matura z matematyki, poziom podstawowy · sierpień 2013 · formuła do 2014

Ten plik to oficjalne odpowiedzi i zasady oceniania CKE. Na wielkimatematyk.pl każde zadanie z tego arkusza ma podpowiedzi i rozwiązanie rozpisane na małe kroki, więc łatwo sprawdzisz, w którym miejscu pojawił się błąd.

Zeskanuj kod telefonem

albo kliknij adres:

wielkimatematyk.pl/matura-matematyka-podstawowa/formula-do-2014/2013/sierpien/

Chcesz poćwiczyć więcej?

Generator arkuszy na wielkimatematyk.pl losuje zadania egzaminacyjne z wybranych działów i drukuje je razem z kluczem odpowiedzi.

wielkimatematyk.pl/matura-matematyka-podstawowa/

Pozostałe strony tego pliku to oryginalny dokument Centralnej Komisji Egzaminacyjnej (cke.gov.pl), bez żadnych zmian. Tę stronę dodał serwis wielkimatematyk.pl.

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych
oraz
schemat oceniania

sierpień 2013

Poziom Podstawowy

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odpowiedź	D	A	B	D	C	B	B	C	C	B	A	C	D	D	C	B	C	A	D	D	C	B	D	B	B

Zadanie 26. (*2 pkt*)

Rozwiąż nierówność $3x - x^2 \geq 0$.

Rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap rozwiązania:

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $-x^2 + 3x$:

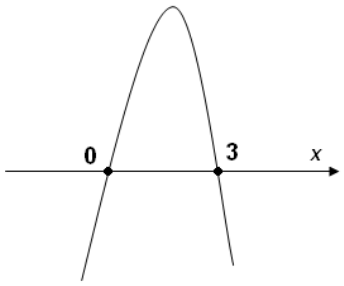
- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub postać iloczynową trójmianu lub zaznaczając na wykresie
  $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ lub $-x(x-3)$

albo

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:
  $\Delta = 9 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = 9$. Stąd $x_1 = \frac{-3-3}{-2} = 3$ oraz $x_2 = \frac{-3+3}{-2} = 0$.

Drugi etap rozwiązania:

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $0 \leq x \leq 3$ lub $\langle 0, 3 \rangle$ lub $x \in \langle 0, 3 \rangle$ np. odczytując go ze szkicu wykresu funkcji $f(x) = -x^2 + 3x$.



Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .....1 pkt

gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $-x(x-3)$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x) = -x^2 + 3x$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- realizując pierwszy etap popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np. popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje .....2 pkt

gdy:

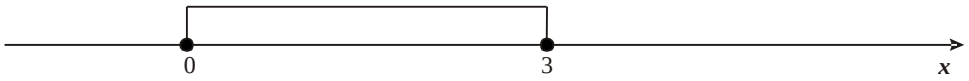
- poda zbiór rozwiązań nierówności : $\langle 0, 3\rangle$ lub $x \in \langle 0, 3\rangle$ lub $x \geq 0$ i $x \leq 3$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x \geq 0,\ x \leq 3$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.



Kryteria
oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

1. Akceptujemy sytuację, gdy zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ i zapisze, np. $x \in \langle 0, -3\rangle$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \in \langle 3, 0\rangle$, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 27. *(2 pkt)*

Rozwiąż równanie $x^3 - 6x^2 - 12x + 72 = 0$.

I sposób rozwiązania (metoda grupowania)

Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynowej stosując metodę grupowania wyrazów:

$x\left(x^2 - 12\right) - 6\left(x^2 - 12\right) = 0$ lub $x^2\left(x - 6\right) - 12\left(x - 6\right) = 0$

$\left(x - 6\right)\left(x^2 - 12\right) = 0$.

Stąd $x = 6$ lub $x = -2\sqrt{3}$ lub $x = 2\sqrt{3}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .....1 pkt

gdy zapisze lewa stronę równania w postaci iloczynu, np. $\left(x - 6\right)\left(x^2 - 12\right)$,

$\left(x - 6\right)\left(x - \sqrt{12}\right)\left(x + \sqrt{12}\right)$, przy czym postać ta musi być otrzymana w sposób poprawny,

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .....2 pkt
gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x=6$ lub $x=-2\sqrt{3}$ lub $x=2\sqrt{3}$.

II sposób rozwiązania (metoda dzielenia)
Stwierdzamy, że liczba 6 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3-6x^2-12x+72$. Dzielimy wielomian $x^3-6x^2-12x+72$ przez dwumian $(x-6)$. Otrzymujemy iloraz (x^2-12).
Zapisujemy równanie w postaci $(x-6)(x^2-12)=0$. Stąd $(x-6)(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})=0$
zatem $x=6$ lub $x=-\sqrt{12}$ lub $x=\sqrt{12}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .....1 pkt
gdy podzieli wielomian $x^3-6x^2-12x+72$ przez dwumian $(x-6)$, otrzyma iloraz (x^2-12) i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .....2 pkt
gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x=6$ lub $x=-\sqrt{12}$ lub $x=\sqrt{12}$

Zadanie 28. (*2 pkt*)

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha=2$. Oblicz $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$.

I sposób rozwiązania

Dzieląc licznik i mianownik ułamka $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ przez $\cos\alpha$ i wykorzystując zależność

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ otrzymujemy } \frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}.$$

II sposób rozwiązania

Wykorzystując zależność $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ zapisujemy $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$.

Przekształcamy $\sin\alpha=2\cos\alpha$, podstawiamy do wyrażenia $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ i wyznaczamy jego wartość:

$$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{2\cos\alpha-\cos\alpha}{2\cos\alpha+\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{3\cos\alpha}=\frac{1}{3}.$$

III sposób rozwiązania

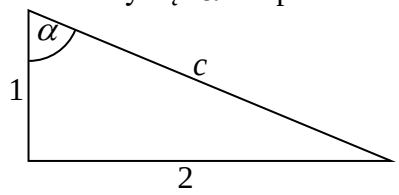
Wykorzystując zależność $\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ zapisujemy $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2$.

Przekształcamy $\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{2}$, podstawiamy do wyrażenia $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ i wyznaczamy jego wartość:

$$\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha - \frac{\sin\alpha}{2}}{\sin\alpha + \frac{\sin\alpha}{2}} = \frac{\frac{2\sin\alpha - \sin\alpha}{2}}{\frac{2\sin\alpha + \sin\alpha}{2}} = \frac{2\sin\alpha - \sin\alpha}{2} \cdot \frac{2}{2\sin\alpha + \sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{3\sin\alpha} = \frac{1}{3}.$$

IV sposób rozwiązania

Rysujemy trójkąt prostokątny, zaznaczamy kąt α i wprowadzamy oznaczenia.



Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym, zapisujemy

$$\sin\alpha = \frac{2}{c},\ \cos\alpha = \frac{1}{c}.$$

Podstawiając $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, wyznaczamy wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$:

$$\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\frac{2}{c} - \frac{1}{c}}{\frac{2}{c} + \frac{1}{c}} = \frac{\frac{2-1}{c}}{\frac{2+1}{c}} = \frac{1}{3}.$$

Schemat oceniania I, II, III i IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ……1 pkt

gdy

- podzieli licznik i mianownik ułamka $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ przez $\cos\alpha$, zapisze ten ułamek w postaci $\frac{\text{tg}\alpha - 1}{\text{tg}\alpha + 1}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- zapisze zależność $\sin\alpha = 2\cos\alpha$, doprowadzi ułamek do postaci $\frac{2\cos\alpha - \cos\alpha}{2\cos\alpha + \cos\alpha}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- zapisze zależność $\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{2}$, doprowadzi ułamek do postaci $\frac{\sin\alpha - \frac{\sin\alpha}{2}}{\sin\alpha + \frac{\sin\alpha}{2}}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 1 i 2 (nawet z błędem rachunkowym) oraz zapisze $\sin\alpha=\frac{2}{c}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 1 i 2 (nawet z błędem rachunkowym) oraz zapisze $\cos\alpha=\frac{1}{c}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 1 i 2, obliczy długość przeciwprostokątnej, zaznaczy w tym trójkącie poprawnie kąt α i obliczy sinus lub cosinus tego kąta, i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ……2 pkt

gdy poprawnie wyznaczy wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}:\ \frac{1}{3}$.

Uwagi

1. Jeśli zdający przyjmie, że $\sin\alpha=2$ i $\cos\alpha=1$, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Wszystkie rozwiązania, w których zdający błędnie zaznaczy kąt α na przedstawionym przez siebie rysunku i z tego korzysta oceniamy na **0 punktów**.
3. Jeśli zdający odczyta z tablic wartość kąta, dla którego $\text{tg}\alpha=2$: $\alpha=63^\circ$ oraz zapisze $\sin 63^\circ=0,8910$ lub $\cos 63^\circ=0,4540$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **1 punkt**.
4. Jeśli zdający odczyta z tablic wartość kąta, dla którego $\text{tg}\alpha=2$: $\alpha=63^\circ$ oraz zapisze $\sin 63^\circ=0,8910$ lub $\cos 63^\circ=0,4540$ i obliczy wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\approx 0,3249$, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeśli zdający odczyta z tablic wartość kąta, dla którego $\text{tg}\alpha=2$: $\alpha=64^\circ$ oraz zapisze $\sin 64^\circ=0,8988$ lub $\cos 64^\circ=0,4384$ i obliczy wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\approx 0,3443$, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 29. (*2 pkt*)

W tabeli zestawiono oceny z matematyki uczniów klasy 3A na koniec semestru.

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba ocen	0	4	9	13	*x*	1

Średnia arytmetyczna tych ocen jest równa 3,6. Oblicz liczbę *x* ocen bardzo dobrych (5) z matematyki wystawionych na koniec semestru w tej klasie.

Rozwiązanie:

Obliczamy średnią arytmetyczną ocen zestawionych w tabeli $\frac{0\cdot 1+4\cdot 2+9\cdot 3+13\cdot 4+x\cdot 5+1\cdot 6}{0+4+9+13+x+1}$.

Ponieważ ta średnia arytmetyczna jest równa 3,6. Zatem otrzymujemy równanie

$$\frac{0\cdot 1+4\cdot 2+9\cdot 3+13\cdot 4+x\cdot 5+1\cdot 6}{0+4+9+13+x+1}=3,6.$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{5x+93}{x+27}=\frac{18}{5}$$
$$5(5x+93)=18(x+27),$$
$$25x+465=18x+486,$$
$$7x=21,$$
$$x=3.$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .....1 pkt
gdy:

- zapisze równanie pozwalające obliczyć liczbę ocen bardzo dobrych i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd, np.:
$\frac{0\cdot 1+4\cdot 2+9\cdot 3+13\cdot 4+x\cdot 5+1\cdot 6}{0+4+9+13+x+1}=3,6$ lub $\frac{4\cdot 2+9\cdot 3+13\cdot 4+x\cdot 5+1\cdot 6}{0+4+9+13+x+1}=3,6$

albo

- zapisze równanie pozwalające obliczyć liczbę ocen bardzo dobrych, ale popełni błąd przy przepisywaniu danych.

Zdający otrzymuje .....2 pkt
gdy obliczy liczbę ocen bardzo dobrych: 3.

Uwaga

Jeśli zdający odgadnie, że liczba ocen bardzo dobrych jest równa 3, i sprawdzi to, wykonując odpowiednie obliczenia, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 30. *(2 pkt)*

Uzasadnij, że jeżeli a jest liczbą rzeczywistą różna od zera i $a+\frac{1}{a}=3$ to $a^2+\frac{1}{a^2}=7$.

I sposób rozwiązania

Równość $a+\frac{1}{a}=3$ podnosimy obustronnie do kwadratu i przekształcamy równoważnie

$$a^2+2\cdot a\cdot\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}=9,$$

$$a^2+\frac{1}{a^2}=9-2.$$

Stąd $a^2+\frac{1}{a^2}=7$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .....1 pkt

gdy podniesie równość obustronnie do kwadratu: $a+\frac{1}{a}=3$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .....2 pkt

gdy obliczy wartość wyrażenia $a^2+\frac{1}{a^2}$: 7.

II sposób rozwiązania

Wyrażenie $a^2+\frac{1}{a^2}$ zapisujemy w postaci $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2\cdot a\cdot\frac{1}{a}$.

Zatem $a^2+\frac{1}{a^2}=9-2=7$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .....1 pkt

gdy zapisze zależność między sumą $a^2+\frac{1}{a^2}$, a kwadratem sumy $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .....2 pkt

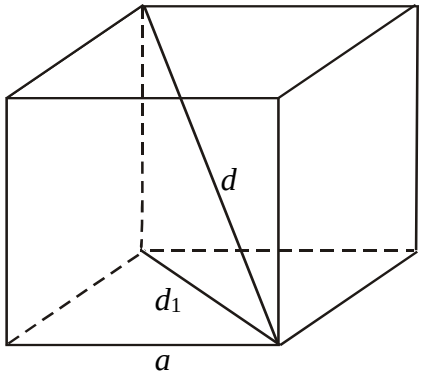
gdy obliczy wartość wyrażenia $a^2+\frac{1}{a^2}$: 7.

Zadanie 31. (*2 pkt*)

Długość krawędzi sześcianu jest o 2 krótsza od długości jego przekątnej. Oblicz długość przekątnej tego sześcianu.

I sposób rozwiązania

Sporządzamy rysunek pomocniczy i wprowadzamy oznaczenia:
a – długość krawędzi sześcianu,
d_1 – długość przekątnej podstawy sześcianu,



d – długość przekątnej sześcianu.

Stosując twierdzenie Pitagorasa otrzymujemy: $a^2+a^2=d_1^2$ oraz $a^2+d_1^2=d^2$.

Stąd $d=a\sqrt{3}$ lub $a=\frac{\sqrt{3}}{3}d$.

Ponieważ $d=a+2$ rozwiązujemy równanie:

- $d=\frac{\sqrt{3}}{3}d+2$ i otrzymujemy $d=\frac{6}{3-\sqrt{3}}$ lub $d=3+\sqrt{3}$

albo

- $a\sqrt{3}=a+2$ i otrzymujemy $a=\frac{2}{\sqrt{3}-1}$ lub $a=1+\sqrt{3}$.

Wyznaczamy długość przekątnej sześcianu: $d=3+\sqrt{3}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ..... 1 pkt

gdy zapisze równanie pozwalające obliczyć długość przekątnej $d=\frac{\sqrt{3}}{3}d+2$ lub $a\sqrt{3}=a+2$

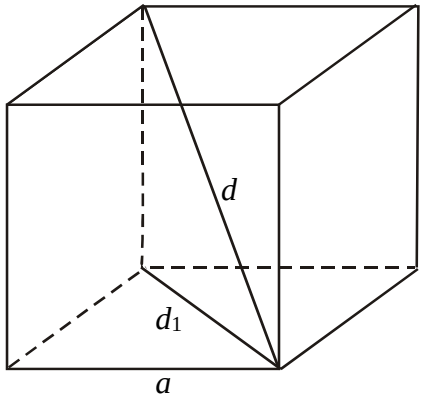
i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ..... 2 pkt

gdy obliczy długość przekątnej: $d=\frac{6}{3-\sqrt{3}}$ lub $d=3+\sqrt{3}$.

II sposób rozwiązania

Sporządzamy rysunek pomocniczy i wprowadzamy oznaczenia:
a – długość krawędzi sześcianu,
d – długość przekątnej sześcianu.



Korzystamy z zależności $d=a\sqrt{3}$.

Ponieważ $a=d-2$ rozwiązujemy równanie:

- $d=(d-2)\sqrt{3}$ i otrzymujemy $d\sqrt{3}-d=2\sqrt{3}$ lub $d\left(\sqrt{3}-1\right)=2\sqrt{3}$.

  Wyznaczamy długość przekątnej sześcianu: $d=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}{3-1}=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)$

  lub $d=3+\sqrt{3}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ..... 1 pkt

gdy zapisze równanie pozwalające obliczyć długość przekątnej $d=(d-2)\sqrt{3}$ lub $d\sqrt{3}-d=2\sqrt{3}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ..... 2 pkt

gdy prawidłowo obliczy długość przekątnej: $d=\frac{6}{3-\sqrt{3}}$ lub $d=3+\sqrt{3}$ lub

$d=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)$ lub $d=\frac{12+\sqrt{48}}{4}$.

Zadanie 32. *(5 pkt)*

Dane są dwie prostokątne działki. Działka pierwsza ma powierzchnię równą $6000\,\text{m}^2$. Działka druga ma wymiary większe od wymiarów pierwszej działki o $10\,\text{m}$ i $15\,\text{m}$ oraz powierzchnię większą o $2250\,\text{m}^2$. Oblicz wymiary pierwszej działki.

I sposób rozwiązania

Niech x oznacza długość jednego z boków pierwszej działki, a y – długość drugiego boku działki pierwszej, wtedy pole powierzchnia działki pierwszej jest równe $x\cdot y$. Stąd mamy równanie $x\cdot y=6000$.

Wtedy $x+10$ oznacza długość jednego z boków działki drugiej, a $y+15$ długość drugiego boku działki drugiej, zaś pole powierzchni tej działki jest równe $6000+2250=8250$. Otrzymujemy zatem równanie $(x+10)\cdot(y+15)=8250$.

Zapisujemy układ równań $\begin{cases}x\cdot y=6000\\(x+10)\cdot(y+15)=8250\end{cases}$

Z pierwszego równania wyznaczamy

$y=\frac{6000}{x}$	$x=\frac{6000}{y}$
podstawiamy do drugiego równania i rozwiązujemy	
$(x+10)\left(\frac{6000}{x}+15\right)=8250$ Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $x^2-140x+4000=0$. $\Delta=19600-16000=3600=60^2$ $x_1=\frac{140-60}{2}=40$ lub $x_2=\frac{140+60}{2}=100$ Obliczamy y:	$\left(\frac{6000}{y}+10\right)(y+15)=8250$ Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $y^2-210y+9000=0$. $\Delta=44100-36000=8100=90^2$ $y_1=\frac{210-90}{2}=60$ lub $y_2=\frac{210+90}{2}=150$ Obliczamy x:

$y_1=\frac{6000}{40}=150$ lub $y_2=\frac{6000}{100}=60$.	$x_1=\frac{6000}{60}=100$ lub $x_2=\frac{6000}{150}=40$.
Odp. Pierwsza działka miała wymiary 40 m na 150 m lub 100 m na 60 m.	

II sposób rozwiązania

Niech x oznacza długość jednego z boków pierwszej działki, a y – długość drugiego boku działki pierwszej, wtedy pole powierzchni działki pierwszej jest równe $x\cdot y$. Stąd mamy równanie $x\cdot y=6000$

Wtedy $x+10$ oznacza długość jednego z boków działki drugiej, a $y+15$ długość drugiego boku działki drugiej, zaś pole powierzchni tej działki jest równe $6000+2250=8250$. Otrzymujemy zatem równanie $(x+10)\cdot(y+15)=8250$

Zapisujemy układ równań $\begin{cases}x\cdot y=6000\\(x+10)\cdot(y+15)=8250\end{cases}$

Stąd otrzymujemy kolejno $\begin{cases}x\cdot y=6000\\x\cdot y+15x+10y+150=8250\end{cases}$

$$\begin{cases}x\cdot y=6000\\6000+15x+10y+150=8250\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\cdot y=6000\\15x+10y-2100=0\end{cases}$$

Równanie $15x+10y-2100=0$ dzielimy obustronnie przez 5.

Otrzymujemy $3x+2y-420=0$, stąd wyznaczamy

$y=-\frac{3}{2}x+210$	$x=-\frac{2}{3}y+140$
podstawiamy do pierwszego równania i rozwiązujemy	
$x\cdot\left(-\frac{3}{2}x+210\right)=6000$ $-\frac{3}{2}x^2+210x-6000=0$ $x^2-140x+4000=0$ $\Delta=19600-16000=3600=60^2$ $x_1=\frac{140-60}{2}=40$ lub $x_2=\frac{140+60}{2}=100$ Obliczamy *y*: $y_1=\frac{6000}{40}=150$ lub $y_2=\frac{6000}{100}=60$.	$\left(-\frac{2}{3}y+140\right)\cdot y=6000$ $-\frac{2}{3}y^2+140y-6000=0$ $y^2-210y+9000=0$ $\Delta=44100-36000=8100=90^2$ $y_1=\frac{210-90}{2}=60$ lub $y_2=\frac{210+90}{2}=150$ Obliczamy *x*: $x_1=\frac{6000}{60}=100$ lub $x_2=\frac{6000}{150}=40$.
Odp. Pierwsza działka miała wymiary 40 m na 150 m lub 100 m na 60 m.	

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt

Zapisanie jednego z równań: $x \cdot y = 6000$ albo $(x+10)\cdot(y+15) = 8250$, gdzie x, y oznaczają długości boków pierwszej działki.

Uwaga

Nie wymagamy opisania wprowadzonych oznaczeń, jeżeli z rozwiązania można wywnioskować, że zdający poprawnie je stosuje.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt

Zapisanie układu równań z niewiadomymi x i y $\begin{cases} x \cdot y = 6000 \\ (x+10)\cdot(y+15) = 8250 \end{cases}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą x lub y, np:

$(x+10)\left(\frac{6000}{x}+15\right) = 8250$ lub $\left(\frac{6000}{y}+10\right)(y+15) = 8250$ lub $x\cdot\left(-\frac{3}{2}x+210\right) = 6000$ lub

$\left(-\frac{2}{3}y+140\right)\cdot y = 6000$ lub $x^2 - 140x + 4000 = 0$ lub $y^2 - 210y + 9000 = 0$.

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą i wówczas jego rozwiązanie zostanie zakwalifikowane co najmniej do kategorii *Pokonanie zasadniczych trudności*.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 4 pkt

- rozwiązanie równania z niewiadomą x i nieobliczenie drugiego boku działki,

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą y i nieobliczenie pierwszego boku działki,

albo

- popełnienie błędu rachunkowego w rozwiązaniu równania z jedną niewidomą (ale otrzymanie dwóch rozwiązań) i konsekwentne do popełnionego błędu obliczenie wymiarów działek,

albo

- obliczenie wymiarów działki tylko w jednym przypadku.

Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt

Obliczenie wymiarów działki pierwszej: działka pierwsza ma wymiary 40 m na 150 m lub 100 m na 60 m.

Uwaga

Jeżeli zdający odgadnie wymiary działki w co najmniej jednym przypadku, to otrzymuje **1 punkt**, nawet w sytuacji, gdy dokonuje systematycznego „przeszukiwania” rozwiązań całkowitych.

Zadanie 33. ***(4 pkt)***

Punkty $A=(-1,-5)$, $B=(3,-1)$ i $C=(2,4)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku *ABCD*. Oblicz pole tego równoległoboku.

I sposób rozwiązania

Wyznaczamy równanie prostej *AB*: $y=x-4$.

Wyznaczamy równanie prostej *CE* prostopadłej do prostej *AB* i przechodzącej przez punkt *C*: $y=-x+6$

Obliczamy współrzędne punktu *E* (przecięcia prostych *AB* i *CE*) rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y=x-4 \\ y=-x+6 \end{cases}.$$

Rozwiązaniem układu jest: $x=5$, $y=1$. Stąd $E=(5,1)$.

Obliczamy długość odcinka *AB*: $|AB|=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$.

Obliczamy długość odcinka *CE*: $|CE|=\sqrt{(5-2)^2+(1-4)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

Zatem pole równoległoboku jest równe: $P_{ABCD}=|AB|\cdot|CE|=4\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}=24$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt

Obliczenie długości odcinka: $|AB|=4\sqrt{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt

Obliczenie współrzędnych punktu *E*: $E=(5,1)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt

Obliczenie wysokości równoległoboku: $|CE|=3\sqrt{2}$.

Uwaga

Zdający może obliczyć wysokość równoległoboku wykorzystując wzór na odległość wierzchołka *C* od prostej *AB*.

Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt

Obliczenie pola równoległoboku: $P_{ABCD}=24$.

II sposób rozwiązania

Zauważamy, że pole równoległoboku *ABCD* jest równe podwojonemu polu trójkąta ABC.

Pole trójkąta *ABC* obliczamy ze wzoru: $P_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left(x_B-x_A\right)\left(y_C-y_A\right)-\left(y_B-y_A\right)\left(x_C-x_A\right)\right|$.

Obliczamy pole równoległoboku:

$$P_{ABCD}=2\cdot P_{ABC}=2\cdot\frac{1}{2}\left|\left(x_B-x_A\right)\left(y_C-y_A\right)-\left(y_B-y_A\right)\left(x_C-x_A\right)\right|=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\left|\left(3-\left(-1\right)\right)\left(4-\left(-5\right)\right)-\left(-1-\left(-5\right)\right)\left(2-\left(-1\right)\right)\right|=\left|4\cdot 9-4\cdot 3\right|=\left|24\right|=24.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .....1 pkt

Zauważenie, że $P_{ABCD}=2\cdot P_{ABC}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt

Zastosowanie wzoru na pole trójkąta: $P_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left(x_B-x_A\right)\left(y_C-y_A\right)-\left(y_B-y_A\right)\left(x_C-x_A\right)\right|$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt

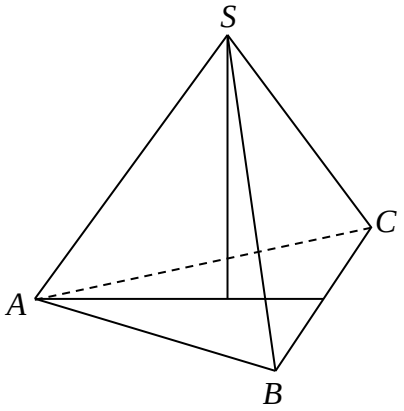
Obliczenie pola trójkąta: 12

Rozwiązanie pełne .....4 pkt

Obliczenie pola równoległoboku: $P_{ABCD}=24$.

Zadanie 34. (*4 pkt*)

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego *ABCS* (tak jak na rysunku) jest równa 72, a promień okręgu wpisanego w podstawę *ABC* tego ostrosłupa jest równy 2. Oblicz tangens kąta między wysokością tego ostrosłupa i jego ścianą boczną.



Rozwiązanie

Oznaczmy:
a – długość boku trójkąta równobocznego *ABC*, w który wpisano okręg o promieniu $r=2$,
H – wysokość tego ostrosłupa,

α – miara kąta między wysokością ostrosłupa i jego ścianą boczną.

Ponieważ $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, to $a = 4\sqrt{3}$.

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego *ABCS* jest równa 72, zatem

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\left(4\sqrt{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H = 72.$$

Obliczamy wysokość ostrosłupa *H*: $\frac{48\sqrt{3}}{12} \cdot H = 72$, stąd $H = \frac{72}{4\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$.

Zauważamy, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{H}$, stąd $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt

Zaznaczenie kąta α między wysokością ostrosłupa i jego ścianą boczną lub wybór właściwego kąta do dalszych obliczeń.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt

Obliczenie długości boku trójkąta *ABC*: $a = 4\sqrt{3}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt

Obliczenie wysokości ostrosłupa *ABCS*: $H = 6\sqrt{3}$.

Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt

Obliczenie tangensa kąta między wysokością ostrosłupa i jego ścianą boczną: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{9}$.