WIELKI MATEMATYK

Zobacz, jak dojść do wyniku w każdym zadaniu

Matura z matematyki, poziom podstawowy · maj 2009 · formuła do 2014

Ten plik to oficjalne odpowiedzi i zasady oceniania CKE. Na wielkimatematyk.pl każde zadanie z tego arkusza ma podpowiedzi i rozwiązanie rozpisane na małe kroki, więc łatwo sprawdzisz, w którym miejscu pojawił się błąd.

Zeskanuj kod telefonem

albo kliknij adres:

wielkimatematyk.pl/matura-matematyka-podstawowa/formula-do-2014/2009/maj/

Chcesz poćwiczyć więcej?

Generator arkuszy na wielkimatematyk.pl losuje zadania egzaminacyjne z wybranych działów i drukuje je razem z kluczem odpowiedzi.

wielkimatematyk.pl/matura-matematyka-podstawowa/

Pozostałe strony tego pliku to oryginalny dokument Centralnej Komisji Egzaminacyjnej (cke.gov.pl), bez żadnych zmian. Tę stronę dodał serwis wielkimatematyk.pl.

Egzamin maturalny
maj 2009

MATEMATYKA

POZIOM PODSTAWOWY

KLUCZ PUNKTOWANIA ODPOWIEDZI

Zadanie 1.

a)

Korzystanie z informacji	Wyznaczanie wartości funkcji dla danych argumentów i jej miejsca zerowego.	0–2

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli bezbłędnie uzupełni tabelę.
Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli poprawnie zapisze tylko wartości funkcji dla argumentów (-3) oraz 3 albo wyznaczy tylko miejsce zerowe funkcji.

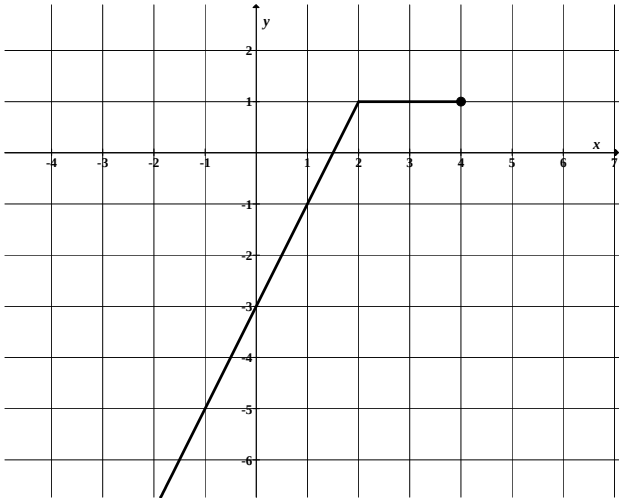
Poprawna odpowiedź:

x	-3	3	1,5
$f(x)$	-9	1	0

b)

Korzystanie z informacji	Rysowanie wykresu funkcji.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli bezbłędnie narysuje wykres funkcji f.
Poprawna odpowiedź:



c)

Korzystanie z informacji	Odczytywanie własności funkcji liniowej.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli rozwiąże nierówność $f(x) \geq -6$.

Poprawna odpowiedź: $x \geq -\frac{3}{2}$.

Wiadomości i rozumienie	Wyznaczanie liczb całkowitych należących do danego przedziału liczbowego.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli wypisze wszystkie całkowite argumenty funkcji *f* spełniające nierówność $f(x) \geq -6$.

Poprawna odpowiedź: $-1, 0, 1, 2, 3, 4$.

Zadanie 2.

Tworzenie informacji	Podawanie opisu matematycznego sytuacji przedstawionej w zadaniu w postaci układu równań.	0–2

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli zapisze układ równań opisujący warunki zadania, np. $\begin{cases} m+n=140 \\ m+15n=980 \end{cases}$.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze jedno z równań, które opisuje warunki zadania, np. $7(m+n)=980$ albo $m+15n=980$ albo $6m=8n$.

Korzystanie z informacji	Rozwiązywanie układu równań liniowych.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli rozwiąże układ równań i poda liczby detali do wykonania przez każdego z rzemieślników.
Poprawna odpowiedź: $m=80$ i $n=60$.

Zadanie 3.

a)

Korzystanie z informacji	Rozwiązywanie nierówności kwadratowej zapisanej na podstawie tekstu zadania.	0–2

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli przekształci nierówność $f(x)+5<3x$ do postaci nierówności kwadratowej, np. $-2x^2-3x+5<0$ i rozwiąże ją.

Poprawna odpowiedź: $x\in\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)\cup(1,\infty)$.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli przekształci nierówność $f(x)+5<3x$ do postaci nierówności kwadratowej i na tym poprzestanie lub popełni błędy w rozwiązaniu tej nierówności.

b)

Korzystanie z informacji	Podawanie zbioru wartości funkcji.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli poda zbiór wartości funkcji g.

Poprawna odpowiedź: $(-\infty,8\rangle$.

c)

Korzystanie z informacji	Przekształcanie wzoru funkcji do innej postaci.	0–2

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy współczynniki *b* i *c*.
Poprawna odpowiedź: $b=12$, $c=-10$.
Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli poprawnie obliczy tylko jeden ze współczynników albo zapisze poprawnie warunki pozwalające na obliczenie współczynników *b* i *c*, ale popełni błąd przy obliczaniu tych współczynników.

Zadanie 4.

Korzystanie z informacji	Stosowanie praw działań na potęgach o wykładniku naturalnym.	0–2

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli poprawnie zastosuje prawa działań na potęgach i zapisze równanie w postaci umożliwiającej obliczenie niewiadomej, np. $7x = 3^{54}\left(3^2 - 3 + 1\right)$.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze liczby $243^{11}, 81^{14}, 9^{27}$ w postaci potęg liczby 3 i na tym poprzestanie lub w dalszej części rozwiązania popełni błędy.

Wiadomości i rozumienie	Rozwiązanie równania liniowego.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli wykaże, że liczba $x = 3^{54}$ jest rozwiązaniem równania, np.

$7x = 3^{54}\left(3^2 - 3 + 1\right)$ stąd $7x = 3^{54} \cdot 7$, więc $x = 3^{54}$.

Zadanie 5.

a)

Tworzenie informacji	Zapisywanie warunków wynikających z równości wielomianów.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze wszystkie zależności wynikające z równości wielomianów $2a + 3 = a$ i $a + b + c = -4$, i $b = -1$.

Korzystanie z informacji	Rozwiązywanie układu równań liniowych.	0–2

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy współczynniki a i c.

Poprawna odpowiedź: $a = -3$ i $c = 0$.
Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy poprawnie tylko jeden ze współczynników.

b)

Korzystanie z informacji	Rozkładanie wielomianu na czynniki.	0–2

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli rozłoży wielomian na czynniki liniowe.
Poprawna odpowiedź: $W(x) = x\left(x + 4\right)\left(x - 1\right)$.
Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze wielomian w postaci iloczynu wielomianów, z których jeden jest stopnia drugiego $W(x) = x\left(x^2 + 3x - 4\right)$ lub $W(x) = \left(x - 1\right)\left(x^2 + 4x\right)$, lub $W(x) = \left(x + 4\right)\left(x^2 - x\right)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zadanie 6.

a)

Korzystanie z informacji	Zastosowanie definicji funkcji trygonometrycznych do rozwiązania problemu.	0–2

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli skorzysta z definicji trygonometrycznych kąta α w trójkącie prostokątnym i przekształci wyrażenie $\sin\alpha - \text{tg}\alpha$ do postaci $\frac{a(b-c)}{bc}$, gdzie a i b są odpowiednimi długościami przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, zaś c jest długością przeciwprostokątnej.
Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli skorzysta z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym i zapisze: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\text{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ i na tym poprzestanie.

Tworzenie informacji	Uzasadnienie nierówności.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli uzasadni nierówność $\sin\alpha - \text{tg}\alpha < 0$ powołując się, np. na znak różnicy $b - c < 0$.

b)

Korzystanie z informacji	Stosowanie związków między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta do przekształcania tożsamości trygonometrycznych.	0–2

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy wartość wyrażenia $\cos^3\alpha + \cos\alpha \sin^2\alpha$.
Poprawna odpowiedź: $\frac{1}{3}$.
Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli tylko obliczy wartość funkcji $\cos\alpha$ i na tym zakończy rozwiązanie.
Poprawna odpowiedź: $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

Zadanie 7.

a)

Korzystanie z informacji	Stosowanie wzoru na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego.	0–2

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy różnicę r ciągu (a_n) oraz jego pierwszy wyraz.
Poprawna odpowiedź: $r = 2$, $a_1 = -11$.
Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy tylko różnicę ciągu i na tym zakończy rozwiązanie lub w dalszych obliczeniach popełni błąd.

b)

Korzystanie z informacji	Stosowanie wzoru na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy wyraz a_8.

Poprawna odpowiedź: $a_8 = 3$.

Wiadomości i rozumienie	Sprawdzanie z definicji, czy dany ciąg jest geometryczny.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli uzasadni, że ciąg (a_7, a_8, a_{11}) jest ciągiem geometrycznym.

c)

Wiadomości i rozumienie	Stosowanie definicji na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze wzór na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu (a_n).

Poprawna odpowiedź: $S_n = n^2 - 12n$, $n \geq 1$.

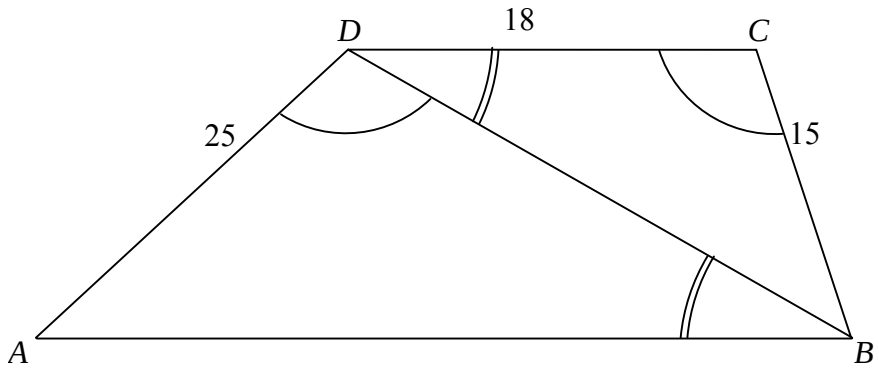
Korzystanie z informacji	Wykorzystanie własności funkcji kwadratowej.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli wyznaczy liczbę *n*, dla której S_n osiąga wartość najmniejszą.

Poprawna odpowiedź: $n = 6$.

Zadanie 8.

Tworzenie informacji	Dobieranie odpowiedniego algorytmu do rozwiązania zadania.	0–3



Zdający otrzymuje 3 punkty, jeśli wykorzysta podobieństwo trójkątów *ABD* oraz *BDC* i obliczy długość przekątnej *BD* oraz podstawy *AB*.

Poprawna odpowiedź: $|BD| = 30$, $|AB| = 50$.

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy długość odcinka *BD* wykorzystując przy tym podobieństwo trójkątów *ABD* oraz *BDC*.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli uzasadni, że trójkąty *ABD* i *BDC* są podobne i na tym zakończy rozwiązanie lub popełni błędy.

Wiadomości i rozumienie	Stosowanie związków miarowych w figurach płaskich.	0–1

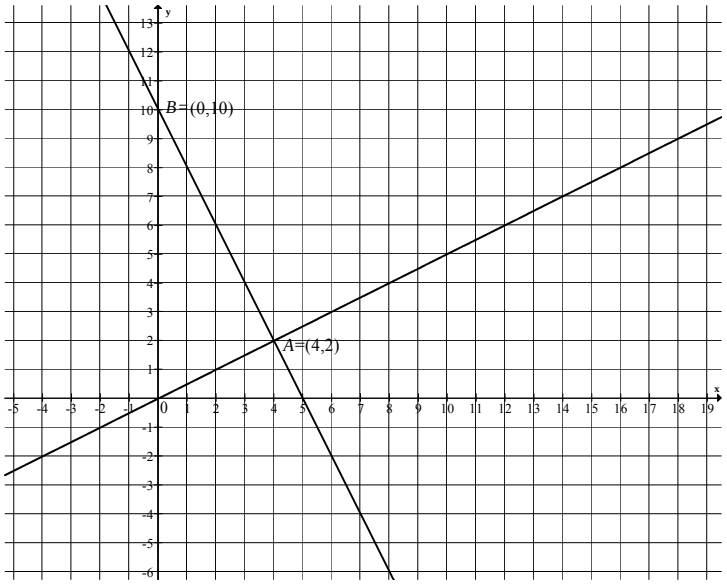
Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy obwód trapezu (pod warunkiem, że poprawnie obliczy długość podstawy *AB*).

Poprawna odpowiedź: 108.

Zadanie 9.

Korzystanie z informacji	Wyznaczenie równania prostej spełniającej warunki zadania.	0–2

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli zapisze równanie prostej *AB* prostopadłej do prostej *OA*.
Poprawna odpowiedź: $y = -2x + 10$.
Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli wyznaczy tylko współczynnik kierunkowy prostej *AB* i na tym poprzestanie.
Poprawna odpowiedź: (-2).



Korzystanie z informacji	Obliczenie współrzędnych punktu przecięcia dwóch prostych.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy współrzędne punktu A.
Poprawna odpowiedź: $A = (4, 2)$.

Wiadomości i rozumienie	Wykorzystanie pojęcia odległości na płaszczyźnie kartezjańskiej.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy długość przyprostokątnej OA.
Poprawna odpowiedź: $|OA| = 2\sqrt{5}$.

Zadanie 10.

a)

Korzystanie z informacji	Obliczanie średniej arytmetycznej.	0–2

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy średnią liczbę błędów i zapisze wynik w zaokrągleniu do całości.

Poprawna odpowiedź: $\overline{x} = \frac{57}{30} = 1,9 \approx 2$.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli poprawnie zastosuje wzór na średnią arytmetyczną i na tym poprzestanie lub popełni błąd w obliczaniu średniej, albo źle zaokrągli wynik.

b)

Korzystanie z informacji	Obliczanie prawdopodobieństwa zdarzeń.	0–3

Zdający otrzymuje 3 punkty, jeśli obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A i zapisze wynik w postaci ułamka nieskracalnego.

Poprawna odpowiedź: $P(A)=\frac{63}{145}$.

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy moc zbioru Ω i moc zbioru A w tym samym modelu i na tym poprzestanie lub popełni błąd w obliczeniach, albo nie poda prawdopodobieństwa w postaci ułamka nieskracalnego.

Poprawna odpowiedź: $|\Omega|=\frac{30\cdot 29}{2}=435$ i $|A|=21\cdot 9=189$ lub $|\Omega|=30\cdot 29$ i $|A|=21\cdot 9\cdot 2$.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli poprawnie policzy moc zbioru Ω.

Zadanie 11.

a)

Korzystanie z informacji	Stosowanie związków miarowych w bryłach z użyciem trygonometrii.	0–4

Zdający otrzymuje 4 punkty, jeśli obliczy objętość walca.

Poprawna odpowiedź: $V=\frac{54\sqrt{3}}{\pi}$.

Zdający otrzymuje 3 punkty, jeśli obliczy pole powierzchni bocznej walca i promień jego podstawy i na tym zakończy lub popełni błąd w obliczaniu objętości walca.

Poprawna odpowiedź: $P_b=36\sqrt{3}$, $r=\frac{3}{\pi}$.

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy pole powierzchni bocznej walca albo wysokość walca i promień jego podstawy i nie kontynuuje rozwiązania.

Poprawna odpowiedź: $P_b=36\sqrt{3}$ albo $h=6\sqrt{3}$ i $r=\frac{3}{\pi}$.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy długość jednego z boków prostokąta, który jest powierzchnią boczną walca: h lub $2\pi r$.

Poprawna odpowiedź: $h=6\sqrt{3}$ lub $2\pi r=6$.

Wiadomości i rozumienie	Szacowanie wartości liczbowej.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli uzasadni, że objętość walca jest mniejsza od $18\sqrt{3}$.

Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą niż przedstawiona w kluczu punktowania przyznajemy maksymalną liczbę punktów.

Egzamin maturalny
maj 2009

MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

KLUCZ PUNKTOWANIA ODPOWIEDZI

Zadanie 1.

a)

Wiadomości i rozumienie	Wykorzystanie pojęcia wartości argumentu i wartości funkcji.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy wartość funkcji *f* dla $x = 2009$.
Poprawna odpowiedź: $f\left(2009\right) = 2008 \cdot 2009 + 2009 = 2009^2$

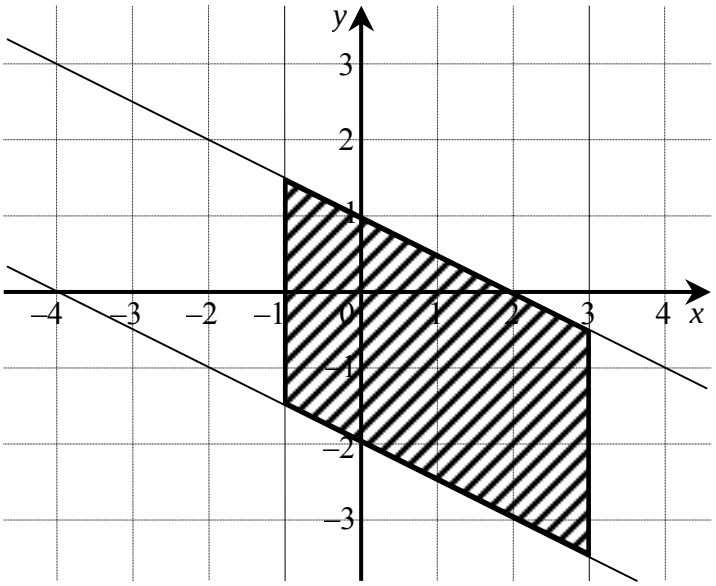
Tworzenie informacji	Interpretowanie otrzymanych wyników.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze wniosek.
Poprawna odpowiedź: Punkt *P* należy do wykresu funkcji *f*.

b)

Tworzenie informacji	Rysowanie w układzie współrzędnych zbioru opisanego układem warunków.	0–2

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli narysuje bezbłędnie zbiór opisany w zadaniu.
Poprawna odpowiedź:



Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli narysuje proste o równaniach $y = -\frac{1}{2}x + 1$, $y = -\frac{1}{2}x - 2$ i na tym zakończy lub popełni błędy w zaznaczaniu opisanego zbioru.

Zadanie 2.

Korzystanie z informacji	Zapisanie wielomianu, który przy dzieleniu przez dany dwumian daje wskazany iloraz i daną resztę.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze wielomian $W\left(x\right)$ w postaci wynikającej z warunków zadania.
Poprawna odpowiedź: $W(x) = (x-1)(8x^2 + 4x - 14) - 5$

Wiadomości i rozumienie	Wykonywanie działań na wielomianach.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli uporządkuje wielomian $W(x)$.
Poprawna odpowiedź: $W(x)=8x^3-4x^2-18x+9$.

Korzystanie z informacji	Wyznaczanie pierwiastków wielomianu.	0–2

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy pierwiastki wielomianu $W(x)$.
Poprawna odpowiedź: $x_1=-1,5$, $x_2=0,5$, $x_3=1,5$.
Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze wielomian $W(x)$ w postaci iloczynu czynnika stopnia pierwszego i czynnika stopnia drugiego, np. $W(x)=(2x-1)(4x^2-9)$ i na tym zakończy rozwiązanie lub popełni błędy w wyznaczaniu pierwiastków wielomianu.

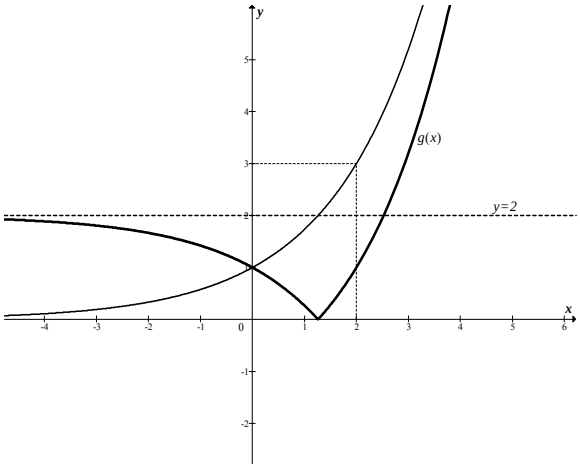
Zadanie 3.
a)

Wiadomości i rozumienie	Wykorzystanie definicji funkcji wykładniczej.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy wartość podstawy *a*.
Poprawna odpowiedź: $a=\sqrt{3}$.
b)

Korzystanie z informacji	Rysowanie wykresu funkcji typu $y=\lvert f(x)-b\rvert$.	0–2

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli narysuje wykres funkcji $g(x)=\lvert f(x)-2\rvert$.
Poprawna odpowiedź:



Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli narysuje tylko wykres funkcji $y=f(x)-2$ i na tym poprzestanie lub popełni błędy przy dalszym przekształcaniu wykresu.

Tworzenie informacji	Interpretowanie liczby rozwiązań równania z parametrem.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli poda wszystkie wartości parametru *m*, dla których równanie $g(x)=m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.
Poprawna odpowiedź: $m\in\{0\}\cup\langle 2,+\infty)$.

Zadanie 4.

Korzystanie z informacji	Wykorzystanie definicji ciągu arytmetycznego.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli rozpozna, że ciąg liczb monet wkładanych do skarbca przez kolejne dni przez skarbnika jest arytmetyczny.
Poprawna odpowiedź: Liczby monet wkładanych przez kolejne dni przez skarbnika tworzą ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie równym 25 i różnicy równej 2.

Tworzenie informacji	Zdający podaje opis matematyczny sytuacji w postaci funkcji.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze wzór na $M(n)$ – liczbę monet w *n*–tym dniu po południu.

Poprawna odpowiedź: $M(n)=k+\frac{25+[25+(n-1)2]}{2}\cdot n-50n=n^2-26n+k$.

Korzystanie z informacji	Formułowanie wniosków wynikających z postaci badanego wyrażenia.	0–2

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli zapisze warunek wystarczający na to, aby w skarbcu zawsze były monety i wyznaczy najmniejszą liczbę *k*.

Poprawna odpowiedź: np. $M(n)=(n-13)^2+k-169>0$, więc najmniejszą liczbą k jest 170 albo $\Delta<0$ (bo $n_w\in N$) czyli $26^2-4k<0$, stąd $k>169$, więc najmniejszą liczbą *k* jest 170.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze tylko warunek wystarczający na to, aby w skarbcu zawsze były monety i na tym zakończy rozwiązanie lub popełni błędy przy wyznaczaniu najmniejszej liczby *k*.

Poprawna odpowiedź: np. $M(n)=(n-13)^2+k-169>0$ lub $\Delta<0$, bo $n_w\in N$, stąd $26^2-4k<0$.

Korzystanie z informacji	Posługiwanie się definicją i własnościami funkcji kwadratowej.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy, w którym dniu w skarbcu była najmniejsza liczba monet.
Poprawna odpowiedź: $n=13$.

Zadanie 5.

Korzystanie z informacji	Wykonywanie działań na potęgach o wykładnikach rzeczywistych.	0–3

Zdający otrzymuje 3 punkty, jeśli wykaże równość $B=9\sqrt{A}$.
Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli poprawnie zastosuje wzór na iloczyn potęg o tych samych podstawach i wzór na potęgę potęgi i na tym zakończy.

Poprawna odpowiedź:

$B=3^{2\sqrt{2}+3}=3^{2\sqrt{2}+1+2}=3^2\cdot 3^{\left(4\sqrt{2}+2\right)\cdot\frac{1}{2}}=3^2\cdot\left(3^{4\sqrt{2}+2}\right)^{\frac{1}{2}}$, o ile dowód równości jest prowadzony od jej lewej strony do prawej
albo

$9\sqrt{A} = 3^2 \cdot \left(3^{4\sqrt{2}+2}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{2+\left(4\sqrt{2}+2\right)\cdot\frac{1}{2}}$, o ile dowód równości jest prowadzony od jej prawej strony do lewej.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli poprawnie zastosuje jedynie wzór na iloczyn potęg o tych samych podstawach albo tylko wzór na potęgę potęgi i na tym zakończy.
Poprawna odpowiedź:

$B = 3^{2\sqrt{2}+3} = 3^2 \cdot 3^{2\sqrt{2}+1}$ lub $B = ... = 3^2 \cdot 3^{\left(4\sqrt{2}+2\right)\cdot\frac{1}{2}} = 3^2 \cdot \left(3^{4\sqrt{2}+2}\right)^{\frac{1}{2}}$,o ile dowód równości jest prowadzony od jej lewej strony do prawej
albo

$9\sqrt{A} = 3^2 \cdot \left(3^{4\sqrt{2}+2}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^2 \cdot 3^{\left(4\sqrt{2}+2\right)\cdot\frac{1}{2}}$ lub $9\sqrt{A} = ... = 3^2 \cdot \left(3^{4\sqrt{2}+2}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{2+\left(4\sqrt{2}+1\right)\frac{1}{2}}$, o ile dowód równości jest prowadzony od jej prawej strony do lewej.

Zadanie 6.

Korzystanie z informacji	Posługiwanie się definicją logarytmu.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli wykorzysta definicję logarytmu i zapisze wszystkie warunki określające dziedzinę funkcji *f*.

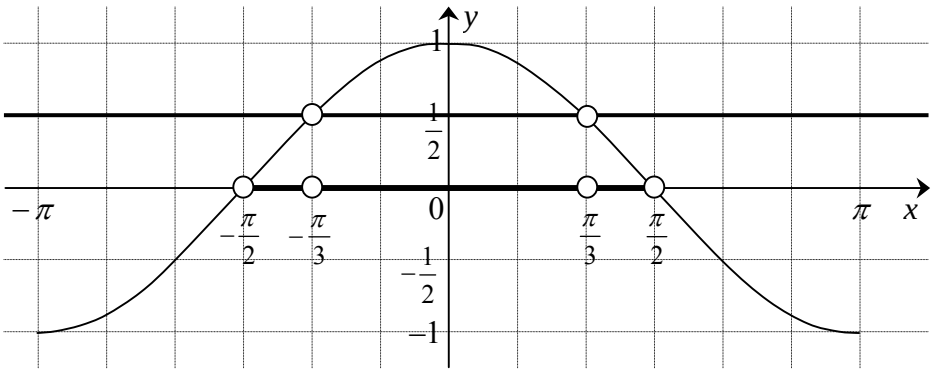
Poprawna odpowiedź: $9 - x^2 > 0$, $2\cos x > 0$, $2\cos x \neq 1$.

Wiadomości i rozumienie	Rozwiązywanie nierówności kwadratowej.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli rozwiąże nierówność kwadratową.
Poprawna odpowiedź: $x \in (-3, 3)$.

Korzystanie z informacji	Odczytywanie z wykresu odpowiedniej funkcji zbioru rozwiązań nierówności trygonometrycznej w przedziale ograniczonym.	0–2

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli poda zbiór rozwiązań nierówności $\cos x > 0$ i $\cos x \neq \frac{1}{2}$ w przedziale $(-3, 3)$.



Poprawna odpowiedź: $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ i $x \neq -\frac{\pi}{3}$ i $x \neq \frac{\pi}{3}$.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli poda zbiór rozwiązań tylko jednej z nierówności.

Korzystanie z informacji	Zapisanie części wspólnej zbiorów w postaci sumy przedziałów liczbowych.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze dziedzinę funkcji *f*.

Poprawna odpowiedź: $D_f = \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Zadanie 7.

Korzystanie z informacji	Stosowanie własności ciągu geometrycznego.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli wykorzysta własność ciągu geometrycznego i zapisze równanie opisujące warunki zadania.

Poprawna odpowiedź: $(x+3)^2 = (x-3)(6x+2)$.

Wiadomości i rozumienie	Rozwiązywanie równania kwadratowego.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli rozwiąże równanie kwadratowe.

Poprawna odpowiedź: $x = -\frac{3}{5}$ lub $x = 5$.

Tworzenie informacji	Wybór ciągu spełniającego warunki zadania.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli wybierze odpowiednią wartość *x*, tak aby wszystkie wyrazy ciągu były dodatnie.

Poprawna odpowiedź: $x = 5$.

Korzystanie z informacji	Stosowanie definicji ciągu geometrycznego.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy iloraz ciągu.

Poprawna odpowiedź: $q = 4$.

Tworzenie informacji	Oszacowanie ilorazu sumy 19-tu przez sumę 20-tu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.	0–2

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli oszacuje iloraz.

Poprawna odpowiedź: np. Przekształcając równoważnie nierówność $\frac{4^{19}-1}{4^{20}-1} < \frac{1}{4}$ dostaje kolejno: $4\left(4^{19}-1\right) < 4^{20}-1$, $4^{20}-4 < 4^{20}-1$, $-3 < 0$, co jest prawdą. To kończy dowód.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli wykorzysta wzór na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego i zapisze iloraz $\frac{S_{19}}{S_{20}}$ w postaci umożliwiającej oszacowanie.

Poprawna odpowiedź: $\frac{S_{19}}{S_{20}} = \frac{4^{19}-1}{4^{20}-1}$.

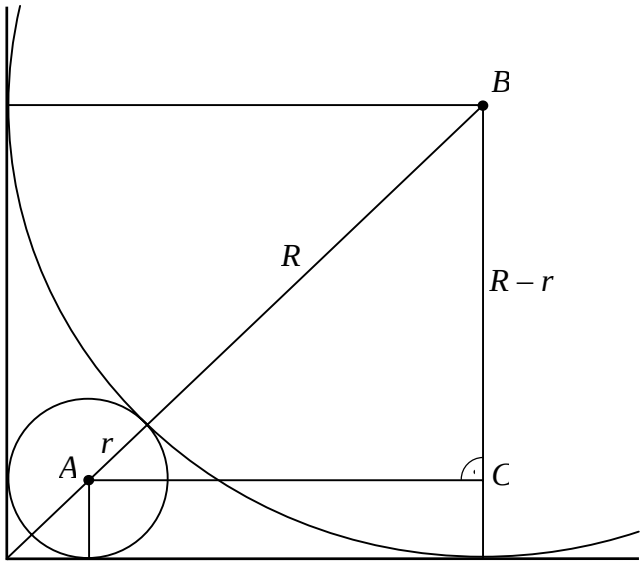
Zadanie 8.

Tworzenie informacji	Podanie opisu matematycznego danej sytuacji problemowej.	0–2

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli zapisze zależność między promieniami okręgów.

Poprawna odpowiedź: $R+r=(R-r)\sqrt{2}$.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego równoramiennego *ABC* w zależności od *R* i *r* i na tym zakończy rozwiązanie lub w dalszej części popełni błędy.



Poprawna odpowiedź: $|AB|=R+r$.

Tworzenie informacji	Przetwarzanie informacji do postaci ułatwiającej rozwiązanie problemu.	0–2

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy stosunek promieni większego i mniejszego okręgu.

Poprawna odpowiedź: $\frac{R}{r}=3+2\sqrt{2}$.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli przekształci zależność $R+r=(R-r)\sqrt{2}$ do postaci umożliwiającej obliczenie stosunku promieni i na tym zakończy rozwiązanie.

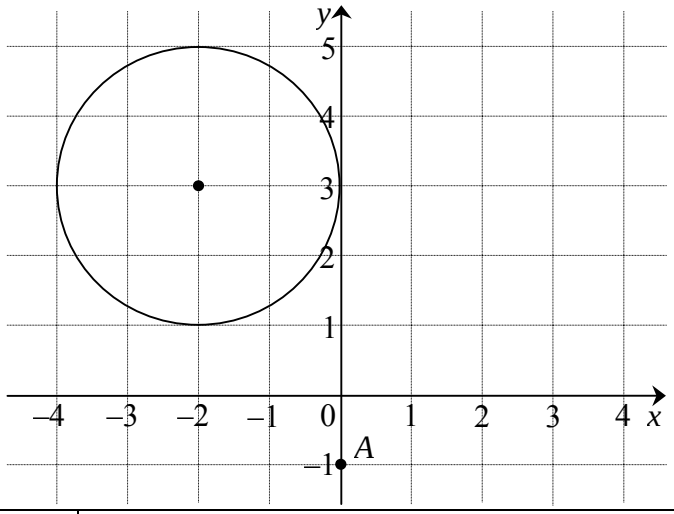
Poprawna odpowiedź: np. $r\left(1+\sqrt{2}\right)=R\left(\sqrt{2}-1\right)$ lub $\left(\frac{R}{r}-1\right)\sqrt{2}=\frac{R}{r}+1$,

lub $1+\frac{r}{R}=\left(1-\frac{r}{R}\right)\sqrt{2}$.

Zadanie 9.

Wiadomości i rozumienie	Wyznaczanie środka i promienia okręgu.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli narysuje w układzie współrzędnych opisany w zadaniu okrąg i zaznaczy dany punkt *A*.



Korzystanie z informacji	Wyznaczanie równania rodziny prostych (nierównoległych do osi *Oy*) przechodzących przez dany punkt.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze równanie szukanej rodziny stycznych.
Poprawna odpowiedź: $y = ax - 1$ lub $ax - y - 1 = 0$.

Tworzenie informacji	Analizowanie wzajemnego położenia prostej i okręgu.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze warunek styczności prostej *k* o równaniu $y = ax - 1$ i danego okręgu.
Poprawna odpowiedź: Odległość środka okręgu *S* od prostej *k* jest równa promieniowi okręgu.

Tworzenie informacji	Stosowanie wzoru na odległość punktu od prostej.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze równanie z niewiadomą *a*.

Poprawna odpowiedź: $\dfrac{|a \cdot (-2) - 3 - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2$.

Tworzenie informacji	Wyciąganie wniosku i zapisanie równania prostej.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze równanie szukanej stycznej.

Poprawna odpowiedź: $y = -\dfrac{3}{4}x - 1$.

Zadanie 10.

Tworzenie informacji	Analizowanie sytuacji i budowanie jej modelu matematycznego.	0–2

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A w tym samym modelu.

Poprawna odpowiedź: $|\Omega| = \binom{4n}{2} = 2n \cdot (4n-1)$, $|A| = \binom{n}{1}\binom{3n}{1} = n \cdot 3n$

lub $|\Omega| = 4n \cdot (4n-1)$, $|A| = 2 \cdot n \cdot 3n$ gdzie n – liczba kul czarnych, $3n$ – liczba kul białych, dla $n \geq 1$.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze tylko liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych i na tym zakończy rozwiązanie.

Korzystanie z informacji	Obliczanie prawdopodobieństwa.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze prawdopodobieństwo zdarzenia A w postaci wyrażenia wymiernego.

Poprawna odpowiedź: $P(A) = \frac{3n}{2(4n-1)}$.

Tworzenie informacji	Analizowanie sytuacji i budowanie jej modelu matematycznego.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli rozwiąże nierówność $\frac{3n}{2(4n-1)} > \frac{9}{22}$ i poda liczbę kul w urnie.

Poprawna odpowiedź: W urnie są 4 kule albo jest 8 kul.

Zadanie 11.

Korzystanie z informacji	Wykorzystanie funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym.	0–1

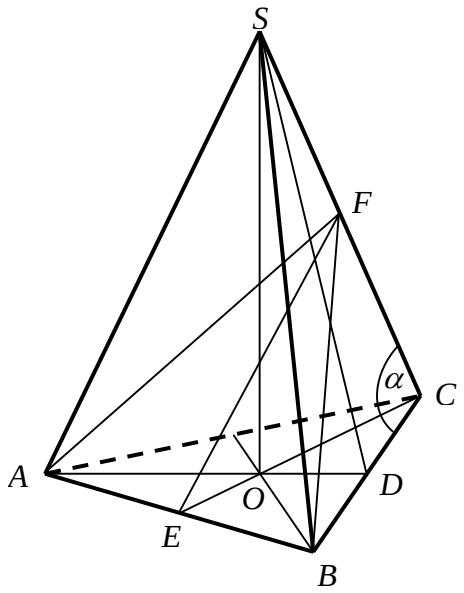
Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy cosinusa kąta między krawędzią boczną a krawędzią podstawy ostrosłupa.

Poprawna odpowiedź: $\cos\alpha = \frac{1}{4}$.

Tworzenie informacji	Narysowanie przekroju ostrosłupa płaszczyzną.	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zaznaczy właściwy przekrój na rysunku.

Poprawna odpowiedź:



Korzystanie z informacji	Zastosowanie twierdzenia cosinusów.	0–3

Zdający otrzymuje 3 punkty, jeśli obliczy wysokość opuszczoną na podstawę *AB* w trójkącie równoramiennym *ABF* (szkicanym przekroju).

Poprawna odpowiedź: $h_p = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy długość ramienia trójkąta równoramiennego *ABF* i na tym zakończy rozwiązanie.

Poprawna odpowiedź: $|AF| = |BF| = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zastosuje twierdzenie cosinusów i zapisze równanie z niewiadomą *x*, gdzie $x = |BF|$ i na tym zakończy rozwiązanie lub w dalszej części popełni błędy.

Poprawna odpowiedź: $x^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \frac{1}{4}$.

Korzystanie z informacji	Obliczanie pola przekroju ostrosłupa	0–1

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy pole przekroju.

Poprawna odpowiedź: $P_p = \frac{a^2\sqrt{5}}{4}$.

Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą niż przedstawiona w kluczu punktowania przyznajemy maksymalną liczbę punktów.