WIELKI MATEMATYK

Zobacz, jak dojść do wyniku w każdym zadaniu

Matura z matematyki, poziom podstawowy · grudzień 2009 · formuła do 2014

Ten plik to oficjalne odpowiedzi i zasady oceniania CKE. Na wielkimatematyk.pl każde zadanie z tego arkusza ma podpowiedzi i rozwiązanie rozpisane na małe kroki, więc łatwo sprawdzisz, w którym miejscu pojawił się błąd.

Zeskanuj kod telefonem

albo kliknij adres:

wielkimatematyk.pl/matura-matematyka-podstawowa/formula-do-2014/2009/grudzien/

Chcesz poćwiczyć więcej?

Generator arkuszy na wielkimatematyk.pl losuje zadania egzaminacyjne z wybranych działów i drukuje je razem z kluczem odpowiedzi.

wielkimatematyk.pl/matura-matematyka-podstawowa/

Pozostałe strony tego pliku to oryginalny dokument Centralnej Komisji Egzaminacyjnej (cke.gov.pl), bez żadnych zmian. Tę stronę dodał serwis wielkimatematyk.pl.

Centralna
Komisja
Egzaminacyjna

Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Próbny egzamin maturalny z matematyki
listopad 2009

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych i przykładowe rozwiązania zadań otwartych

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odpowiedź	A	C	B	B	C	A	B	A	D	A	C	B	B	C	C	D	A	D	C	D	A	A	D	D	A

Przykładowe rozwiązania zadań otwartych

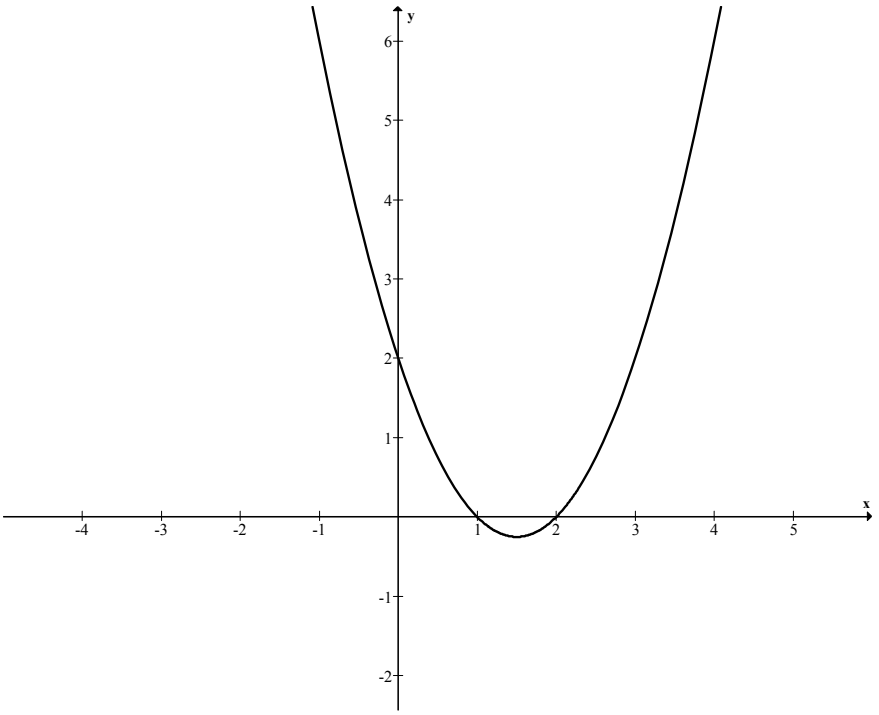
Zadanie 26. (2 punkty)
Rozwiąż nierówność $x^2 - 3x + 2 \le 0$.

Rozwiązanie:
Obliczam miejsca zerowe funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 3x + 2$:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 \qquad \sqrt{\Delta} = 1$$

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Rysuję fragment wykresu funkcji kwadratowej f i na jego podstawie odczytuję rozwiązanie nierówności:



Odpowiedź: $x \in \langle 1, 2 \rangle$.

Uwaga: Można przedstawić funkcję f w postaci $f(x) = (x-1)(x-2)$ i odczytać rozwiązanie nierówności.

Zadanie 27. (2 punkty)
Rozwiąż równanie $x^3 - 7x^2 + 2x - 14 = 0$.

Rozwiązanie:
Stosuję metodę grupowania, by przedstawić lewą stronę równania w postaci iloczynowej:
$$x^3 - 7x^2 + 2x - 14 = x^2(x-7) + 2(x-7) = (x^2+2)(x-7).$$
Z równania $(x^2+2)(x-7) = 0$ otrzymujemy, że
$$x^2 + 2 = 0 \text{ lub } x - 7 = 0.$$
Równanie $x^2 + 2 = 0$ nie ma rozwiązań. Rozwiązaniem równania $x - 7 = 0$ jest liczba 7.

Odpowiedź: Jedynym rozwiązaniem jest $x = 7$.

Zadanie 28. (2 punkty)
W układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty $A = (2, 5)$ i $C = (6, 7)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu *ABCD*. Wyznacz równanie prostej *BD*.

Rozwiązanie:
Obliczam współczynnik kierunkowy prostej *AC*: $a_{AC} = \frac{7-5}{6-2} = \frac{1}{2}$, a następnie wyznaczam współczynnik kierunkowy prostej *BD* prostopadłej do *AC*: $a_{BD} = -2$.
Wyznaczam współrzędne środka *S* odcinka *AC*: $S = \left(\frac{2+6}{2}, \frac{5+7}{2}\right) = (4, 6)$ i wyznaczam równanie prostej o współczynniku kierunkowym -2, przechodzącej przez punkt *S*.

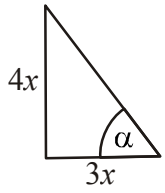
Odpowiedź: $y = -2x + 14$.

Zadanie 29. (2 punkty)
Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. Oblicz $\sin\alpha + \cos\alpha$.

Rozwiązanie:
I sposób rozwiązania:
Z definicji funkcji tangens mamy $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{3}$, zatem $\sin\alpha = \frac{4}{3}\cos\alpha$. Podstawiam tę równość do tożsamości $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i otrzymuję $\left(\frac{4}{3}\cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$, a stąd $\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$.
Zatem $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ lub $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$. Ujemny wynik odrzucam, ponieważ zgodnie z warunkami zadania kąt α jest kątem ostrym. Obliczam wartości funkcji $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, a następnie wartość wyrażenia $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$.

Odpowiedź: $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$.

II sposób rozwiązania:
Rysuję trójkąt prostokątny, w którym oznaczam przyprostokątne $3x$ i $4x$ oraz zaznaczam kąt ostry α tak, aby $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$.



Z twierdzenia Pitagorasa obliczam długość przeciwprostokątnej: $(4x)^2 + (3x)^2 = 25x^2$.

Zatem przeciwprostokątna ma długość $5x$. Obliczam wartości funkcji $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ i $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Stąd $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$.

Odpowiedź: $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$.

Zadanie 30. (2 punkty)

Wykaż, że dla każdego m ciąg $\left(\frac{m+1}{4}, \frac{m+3}{6}, \frac{m+9}{12}\right)$ jest arytmetyczny.

Rozwiązanie:
I sposób rozwiązania:
Wystarczy sprawdzić, że zachodzi następujący związek między sąsiednimi wyrazami ciągu: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Mamy $a_1 = \frac{m+1}{4}$, $a_2 = \frac{m+3}{6}$, $a_3 = \frac{m+9}{12}$.

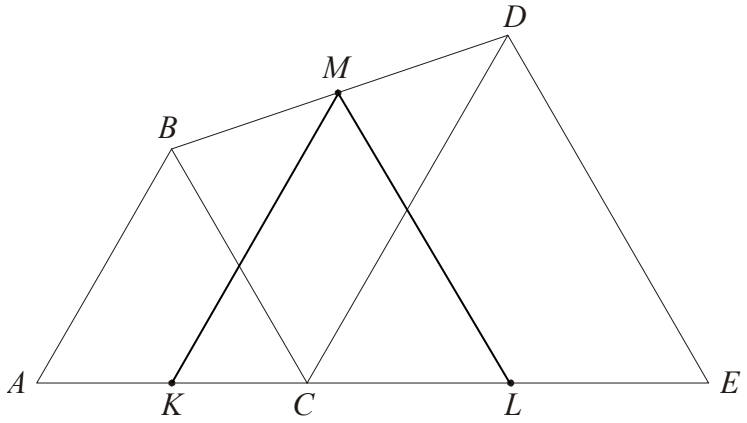
Zatem $\frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{\frac{m+1}{4} + \frac{m+9}{12}}{2} = \frac{3m+3+m+9}{24} = \frac{4m+12}{24} = \frac{m+3}{6} = a_2$.

Stąd wynika, że ciąg $\left(\frac{m+1}{4}, \frac{m+3}{6}, \frac{m+9}{12}\right)$ jest arytmetyczny dla każdego m.

II sposób rozwiązania:
Mamy $a_1 = \frac{m+1}{4}$, $a_2 = \frac{m+3}{6}$, $a_3 = \frac{m+9}{12}$.
Wystarczy sprawdzić, że $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$.
Obliczamy:

$$\frac{m+3}{6} - \frac{m+1}{4} = \frac{m+9}{12} - \frac{m+3}{6}$$
$$\frac{2m+6-3m-3}{12} = \frac{m+9-2m-6}{12}$$
$$\frac{-m+3}{12} = \frac{-m+3}{12}$$

Zadanie 31. (2 punkty)
Trójkąty *ABC* i *CDE* są równoboczne. Punkty *A*, *C* i *E* leżą na jednej prostej. Punkty *K*, *L* i *M* są środkami odcinków *AC*, *CE* i *BD* (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty *K*, *L* i *M* są wierzchołkami trójkąta równobocznego.



Rozwiązanie:
Z warunków zadania wynika, że $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle DCE| = 60°$, więc odcinki *AB* i *CD* są równoległe. Czworokąt *ACDB* jest trapezem. Odcinek *KM* łączy środki boków nierównoległych w tym trapezie, więc jest równoległy do jego podstaw. Wobec tego $|\sphericalangle MKL| = 60°$.

Podobnie $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle CED| = 60°$, więc odcinki *BC* i *DE* są równoległe. Czworokąt *BCED* jest trapezem. Odcinek *ML* łączy środki boków nierównoległych w tym trapezie, więc jest równoległy do jego podstaw. Wobec tego $|\sphericalangle KLM| = 60°$.

Odpowiedź: Dwa kąty trójkąta *KLM* mają miarę $60°$, zatem jest to trójkąt równoboczny.

Zadanie 32. (5 punktów)
Uczeń przeczytał książkę liczącą 480 stron, przy czym każdego dnia czytał jednakową liczbę stron. Gdyby czytał każdego dnia o 8 stron więcej, to przeczytałby tę książkę o 3 dni wcześniej. Oblicz, ile dni uczeń czytał tę książkę.

Rozwiązanie:
Oznaczam: *x* – liczba stron przeczytanych każdego dnia, *y* – liczba dni.
Zapisuję i rozwiązuję układ równań:

$$\begin{cases} x \cdot y = 480 \\ (x+8)\cdot(y-3) = 480 \end{cases}$$

Z pierwszego równania mamy $x = \frac{480}{y}$, zatem

$$\left(\frac{480}{y} + 8\right)\cdot(y-3) = 480 \,|\cdot y$$
$$(480 + 8y)(y-3) = 480y$$

Po uproszczeniu otrzymuję równanie $y^2 - 3y - 180 = 0$.
Rozwiązaniem równania są liczby: –12 oraz 15. Odrzucam ujemną liczbę dni.

Odpowiedź: Uczeń przeczytał książkę w ciągu 15 dni.

Zadanie 33. (4 punkty)

Punkty $A=(2,0)$ i $B=(12,0)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego ABC o przeciwprostokątnej AB. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y=x$. Oblicz współrzędne punktu C.

Rozwiązanie:

I sposób rozwiązania:

Punkt C leży na prostej o równaniu $y=x$ i na okręgu, którego środkiem jest środek przeciwprostokątnej, a promień jest równy połowie długości tej przeciwprostokątnej.

Obliczam długość przeciwprostokątnej AB: $|AB|=\sqrt{(12-2)^2+(0-0)^2}=10$.

Wyznaczam współrzędne środka przeciwprostokątnej: $S=(7,0)$.

Zapisuję równanie okręgu: $(x-7)^2+y^2=25$

Rozwiązuję układ równań $\begin{cases} y=x \\ (x-7)^2+y^2=25 \end{cases}$

Otrzymuję równanie z jedną niewiadomą:

$$x^2-7x+12=0$$

Rozwiązaniem tego równania są liczby: $x_1=4$, $x_2=3$.

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają dwa punkty: $C=(4,4)$ oraz $C=(3,3)$.

II sposób rozwiązania:

Oznaczmy współrzędne punktu C przez (x,y). Wtedy $|AB|=\sqrt{(12-2)^2+(0-0)^2}=10$,

$|AC|=\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}$, $|BC|=\sqrt{(x-12)^2+(y-0)^2}$.

Trójkąt ABC jest prostokątny, więc spełniona jest równość $|AC|^2+|BC|^2=|AB|^2$, czyli $(x-2)^2+y^2+(x-12)^2+y^2=10^2$.

Punkt C leży też na prostej o równaniu $y=x$, zatem aby obliczyć jego współrzędne, należy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} (x-2)^2+y^2+(x-12)^2+y^2=10^2 \\ y=x \end{cases}$$

$$x^2-4x+4+x^2+x^2-24x+144+x^2=100$$

$$4x^2-28x+48=0$$

$$x^2-7x+12=0$$

$$x_1=4, \quad x_2=3$$

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają dwa punkty: $C=(4,4)$ oraz $C=(3,3)$.

Zadanie 34. (4 punkty)

Pole trójkąta prostokątnego jest równe $60\,\text{cm}^2$. Jedna przyprostokątna jest o 7 cm dłuższa od drugiej. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Oznaczam: *a, b* – długości przyprostokątnych danego trójkąta.
Zapisuję układ równań

$$\begin{cases} a = b + 7 \\ \frac{1}{2} a \cdot b = 60 \end{cases}$$

Otrzymuję równanie z jedną niewiadomą $\frac{1}{2}(b+7)b = 60$, którego pierwiastkami są liczby $b = 8$ oraz $b = -15$.
Odrzucam ujemny pierwiastek, gdyż *b* jest długością odcinka. Zatem $b = 8$, $a = 8 + 7 = 15$.
Teraz obliczam długość przeciwprostokątnej $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17$.

Odpowiedź: Przeciwprostokątna ma długość 17 cm.