

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny (SF)
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom rozszerzony
<i>Forma arkusza:</i>	MMA-R1_1P-202
<i>Termin egzaminu:</i>	Termin główny – czerwiec 2020 r.
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	3 sierpnia 2020 r.

Warszawa 2020

Uwaga: Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (4 pkt)

Obszar standardów	Opis wymagań
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania i nierówności wymierne (R3.d).

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1p.

Zdający zapisze, że $x \neq 0$ i $x \neq 1$ i doprowadzi nierówność do postaci $\frac{x}{1-x} \leq 1$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2p.

Zdający zapisze nierówność w postaci

$$\frac{2x-1}{1-x} \leq 0 \text{ i } x \neq 1, \text{ albo } -x(x-1) \leq (x-1)^2 \text{ i } x \neq 1$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne 3p.

Zdający poda pierwiastki $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 1$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne..... 4p.

Zdający zapisze rozwiązanie nierówności z uwzględnieniem założeń $x \neq 0$, $x \neq 1$:

$$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty).$$

Przykładowe rozwiązanie

Zakładamy, że $x \neq 0$ i $\frac{1}{x} - 1 \neq 0$. Stąd $x \neq 0$ i $x \neq 1$.

Wykonując równoważne przekształcenia nierówności otrzymujemy:

$$\left(\frac{1-x}{x}\right)^{-1} \leq 1, \left(\frac{1-x}{x}\right)^{-1} \leq 1, \frac{x}{1-x} \leq 1,$$

$$\frac{x}{1-x} - 1 \leq 0, \frac{x}{1-x} - \frac{1-x}{1-x} \leq 0.$$

Zatem nierówność $\left(\frac{1}{x}-1\right)^{-1} \leq 1$ możemy zapisać w następującej postaci $\frac{2x-1}{1-x} \leq 0$ dla $x \neq 0$ i $x \neq 1$.

Znak ilorazu $\frac{2x-1}{1-x} \leq 0$ jest taki sam jak znak iloczynu $(2x-1)(1-x) \leq 0$.

Pierwiastkami trójmianu $(2x-1)(1-x)$ są liczby: $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 1$.

Stąd wynika, że rozwiązaniem nierówności $\left(\frac{1}{x}-1\right)^{-1} \leq 1$, po uwzględnieniu założeń $x \neq 0$ i $x \neq 1$, jest suma przedziałów: $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$.

Zadanie 2. (3 pkt)

Obszar standardów	Opis wymagań
IV. Użycie i tworzenie strategii.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną (1.f). 4. Funkcje. Zdający mając dany wykres funkcji $y = f(x)$ potrafi naszkicować wykres funkcji $y = f(x) $ (R4.a).

Zasady oceniania i sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1p.

Zdający naszkicuje wykres funkcji f określonej wzorem:

- $f(x) = |x-5|$

albo

- $f(x) = |x-5| + 4$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2p.

Zdający zapisze układ nierówności

- $0 < (a-1)^2 - 4 < 5$ **oraz** rozwiąże poprawnie jedną z nierówności tego układu

albo

- $4 < (a-1)^2 < 9$ **oraz** rozwiąże poprawnie jedną z nierówności tego układu

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne 3p.

Zdający rozwiąże układ nierówności i zapisze, że $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$.

Zasady oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1p.

Zdający zapisze, że podane równanie ma dwa rozwiązania dodatnie, gdy spełniona jest nierówność

$$0 < |x - 5| < 5$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2p.

Zdający zapisze układ nierówności $0 < (a-1)^2 - 4 < 5$ oraz rozwiąże poprawnie jedną z dwóch nierówności tego układu i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne..... 3p.

Zdający rozwiąże układ nierówności i zapisze, że $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$.

Zasady oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1p.

Zdający:

- zapisze, że podane równanie ma więcej niż jedno rozwiązanie wtedy, gdy spełniona jest nierówność

$$(a-1)^2 - 4 > 0,$$

albo

- zapisze podane równanie w postaci alternatywy równań

$$x - 5 = (a-1)^2 - 4 \quad \text{lub} \quad x - 5 = -(a-1)^2 + 4$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2p.

Zdający:

- zapisze, że podane równanie ma więcej niż jedno rozwiązanie wtedy, gdy spełniona jest nierówność

$$(a-1)^2 - 4 > 0,$$

i

- zapisze podane równanie w postaci alternatywy równań

$$x - 5 = (a-1)^2 - 4 \quad \text{lub} \quad x - 5 = -(a-1)^2 + 4$$

i

- rozwiąże poprawnie przynajmniej jedną z trzech nierówności:

$$(a-1)^2 - 4 > 0, \quad (a-1)^2 + 1 > 0, \quad 9 - (a-1)^2 > 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne..... 3p.

Zdający zapisze, że $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$.

Zasady oceniania IV sposobu rozwiązania**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1p.**

Zdający

- zapisze warunek istnienia rozwiązań rzeczywistych równania $|x-5|=(a-1)^2-4$:

$$(a-1)^2-4 \geq 0$$

albo

- zdający zapisze układ nierówności:

$$(-10)^2-4\left(25-\left((a-1)^2-4\right)^2\right) > 0 \quad \text{i} \quad \frac{-(-10)}{1} > 0 \quad \text{i} \quad 25-\left((a-1)^2-4\right)^2 > 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2p.

Zdający zapisze układ nierówności

$$(a-1)^2-4 \geq 0 \quad \text{i} \quad (-10)^2-4\left(25-\left((a-1)^2-4\right)^2\right) > 0 \quad \text{i} \quad \frac{-(-10)}{1} > 0 \quad \text{i} \quad 25-\left((a-1)^2-4\right)^2 > 0$$

i poprawnie rozwiąże drugą lub czwartą z nich i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne..... 3p.Zdający rozwiąże układ nierówności i zapisze, że $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$.**Zasady oceniania V sposobu rozwiązania****Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1p.**

Zdający zastosuje definicję wartości bezwzględnej i zapisze równanie w każdym z dwóch przypadków:

$$\text{gdy } x-5 \geq 0, \text{ to } x-5 = (a-1)^2-4,$$

$$\text{gdy } x-5 < 0, \text{ to } 5-x = (a-1)^2-4$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2p.Zdający zapisze warunki na to, żeby rozwiązaniem równania była liczba dodatnia w każdym z dwóch rozpatrywanych przypadków i wyznaczy wszystkie wartości parametru a , dla których rozwiązaniem równania jest liczba dodatnia w jednym z tych przypadków:

- gdy $x-5 \geq 0$, to $(a-1)^2+1 > 0$ i $(a-1)^2+1 \geq 5$, skąd $a \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

albo

- gdy $x-5 < 0$, to $9-(a-1)^2 > 0$ i $9-(a-1)^2 < 5$, skąd $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne..... 3p.

Zdający wyznaczy wszystkie wartości parametru a , dla których równanie $|x-5|=(a-1)^2-4$ ma dwa rozwiązania dodatnie: $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$.

Uwaga

Jeżeli zdający rozpatrzy oba przypadki, ale w pierwszym przypadku nie skomentuje, że nierówność $(a-1)^2+1>0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej a , to może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie.

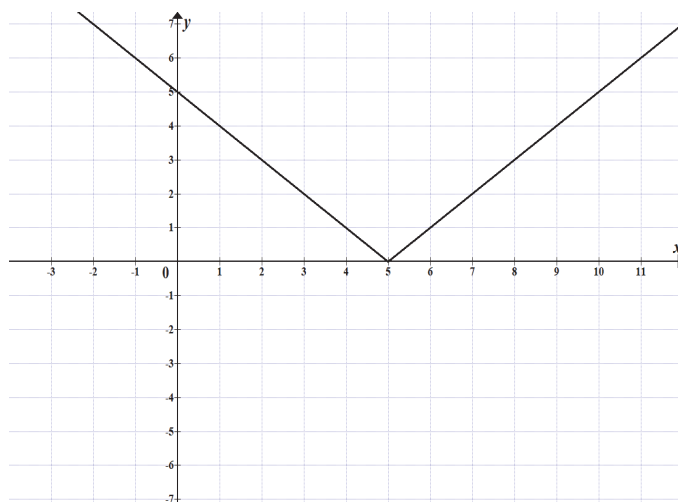
Uwagi:

1. Jeśli zdający zapisze nierówność $(a-1)^2-4 \geq 0$ i konsekwentnie do tego błędu rozwiąże zadanie do końca, otrzymując w odpowiedzi zbiór $(-2, -1) \cup (3, 4)$, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający rozwiązuje zadanie I sposobem i naszkicowany wykres zawiera usterki, ale dalsze rozumowanie jest prawidłowe, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający, sporządzając wykres funkcji $f(x)=|x-5|+4$, błędnie przesunie wykres funkcji $y=|x-5|$ o 4 jednostki w dół i konsekwentnie przeprowadzi rozumowanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający, sporządzając wykres funkcji $f(x)=|x-5|+4$, zamieni miejscami współrzędne wektora przesunięcia, otrzyma wykres funkcji, dla której istnieją dwa rozwiązania dodatnie równania $f(x)=(a-1)^2$ i konsekwentnie przeprowadzi rozumowanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.
5. Jeżeli zdający, sporządzając wykres funkcji $f(x)=|x-5|$, błędnie przesunie wykres funkcji $y=|x|$, i otrzyma wykres funkcji g takiej, że nie istnieją dwa dodatnie rozwiązania równania $g(x)=(a-1)^2-4$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe rozwiązanie

I sposób

Rozważmy funkcję f określoną wzorem $f(x) = |x - 5|$ i naskicujmy jej wykres.



Wnioskujemy stąd, że podane równanie ma dwa pierwiastki dodatnie, jeśli spełniona jest nierówność

$$0 < (a-1)^2 - 4 < 5, \text{ czyli nierówność } 4 < (a-1)^2 < 9.$$

Stąd otrzymujemy, że $2 < |a-1| < 3$, zatem

$$(a-1) \in (-3, -2) \cup (2, 3).$$

Ostatecznie $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$.

II sposób („podstawianie”)

Równanie $|x-5| = (a-1)^2 - 4$ ma dwa dodatnie rozwiązania rzeczywiste, gdy prawdziwa jest nierówność

$$0 < |x-5| < 5.$$

Ponieważ $|x-5| = (a-1)^2 - 4$, więc prawdziwa jest nierówność

$$0 < (a-1)^2 - 4 < 5$$

Nierówność ta jest równoważna koniunkcji nierówności

$$(a-3)(a+1) > 0 \quad \text{i} \quad (a+2)(a-4) < 0,$$

skąd otrzymujemy

$$a \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \quad \text{i} \quad a \in (-2, 4).$$

Zatem dla $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$ równanie $|x-5| = (a-1)^2 - 4$ ma dwa rozwiązania dodatnie.

III sposób

Równanie $|x-5|=(a-1)^2-4$ ma dwa rozwiązania, gdy spełniona jest nierówność

$$(a-1)^2-4 > 0.$$

Nierówność ta jest równoważna nierówności $(a-3)(a+1) > 0$ skąd otrzymujemy

$$a < -1 \text{ lub } a > 3. \quad (1)$$

Równanie $|x-5|=(a-1)^2-4$ jest równoważne alternatywie równań:

$$x-5=(a-1)^2-4 \quad \text{lub} \quad x-5=-(a-1)^2+4$$

$$x=(a-1)^2+1 \quad \text{lub} \quad x=-(a-1)^2+9$$

Rozwiązanie pierwszego z równań jest liczbą dodatnią dla każdej liczby rzeczywistej a .

Zatem, aby równanie miało dwa dodatnie rozwiązania musi być spełniony warunek:

$$-(a-1)^2+9 > 0.$$

Stąd otrzymujemy $(3+a-1)(3-a+1) > 0$, czyli $(a+2)(4-a) > 0$, a zatem

$$-2 < a < 4. \quad (2)$$

Uwzględniając (1) i (2) otrzymujemy $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$.

IV sposób

Ponieważ lewa strona równania $|x-5|=(a-1)^2-4$ jest nieujemna, więc równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(a-1)^2-4 \geq 0,$$

$$(a-1-2)(a-1+2) \geq 0,$$

$$(a-3)(a+1) \geq 0,$$

$$a \leq -1 \quad \text{lub} \quad a \geq 3.$$

Wtedy, podnosząc obie strony równania $|x-5|=(a-1)^2-4$ do kwadratu, otrzymujemy równanie równoważne

$$|x-5|^2 = \left((a-1)^2 - 4 \right)^2,$$

$$(x-5)^2 = \left((a-1)^2 - 4 \right)^2,$$

$$x^2 - 10x + 25 - \left((a-1)^2 - 4 \right)^2 = 0.$$

Równanie to ma dwa dodatnie rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 , gdy spełnione są jednocześnie trzy warunki

$$\Delta > 0 \quad \text{i} \quad x_1 + x_2 > 0 \quad \text{i} \quad x_1 x_2 > 0.$$

Ze wzorów Viète'a otrzymujemy

$$(-10)^2 - 4 \left(25 - \left((a-1)^2 - 4 \right)^2 \right) > 0 \quad \text{i} \quad \frac{-(-10)}{1} > 0 \quad \text{i} \quad 25 - \left((a-1)^2 - 4 \right)^2 > 0,$$

Druga z tych nierówności jest prawdziwa dla każdej wartości rzeczywistej a .

Rozwiązujemy pierwszą z tych nierówności

$$100 - 4 \left(25 - \left((a-1)^2 - 4 \right)^2 \right) > 0,$$

$$25 - \left(25 - \left((a-1)^2 - 4 \right)^2 \right) > 0,$$

$$\left((a-1)^2 - 4 \right)^2 > 0,$$

$$(a-1)^2 - 4 \neq 0,$$

$$(a-1-2)(a-1+2) \neq 0,$$

$$(a-3)(a+1) \neq 0,$$

$$a \neq 3 \quad \text{i} \quad a \neq -1.$$

Rozwiązujemy trzecią z nierówności

$$25 - \left((a-1)^2 - 4 \right)^2 > 0,$$

$$\left(5 - \left((a-1)^2 - 4 \right) \right) \left(5 + \left((a-1)^2 - 4 \right) \right) > 0,$$

$$\left(9 - (a-1)^2 \right) \left((a-1)^2 + 1 \right) > 0,$$

Ponieważ $(a-1)^2 + 1 > 0$ dla każdej wartości a , więc

$$9 - (a-1)^2 > 0,$$

$$(3 - (a-1))(3 + (a-1)) > 0,$$

$$(4 - a)(2 + a) > 0,$$

$$-2 < a < 4.$$

W rezultacie otrzymujemy

$$(a \leq -1 \text{ lub } a \geq 3) \text{ i } a \neq 3 \text{ i } a \neq -1 \text{ i } -2 < a < 4.$$

Stąd

$$a \in (-2, -1) \cup (3, 4).$$

V sposób

Rozważmy dwa przypadki.

1. Gdy $x-5 \geq 0$, czyli $x \geq 5$, to wtedy $|x-5| = x-5$, a równanie ma postać

$$x-5 = (a-1)^2 - 4. \text{ Stąd } x = (a-1)^2 + 1. \text{ Rozwiązanie to jest dodatnie dla każdej wartości}$$

rzeczywistej a . Ponieważ $x \geq 5$, więc $(a-1)^2 + 1 \geq 5$, czyli $(a-1)^2 \geq 4$, skąd $|a-1| \geq 2$,

a więc $a \leq -1$ lub $a \geq 3$. W tym przypadku otrzymujemy

$$a \in (-\infty, -1) \cup \langle 3, +\infty \rangle.$$

2. Gdy $x-5 < 0$, czyli $x < 5$, to wtedy $|x-5| = 5-x$, a równanie ma postać

$$5-x = (a-1)^2 - 4. \text{ Stąd } x = 9 - (a-1)^2. \text{ Rozwiązanie to jest dodatnie, gdy}$$

$9 - (a-1)^2 > 0$, czyli $(a-1)^2 < 9$, skąd $|a-1| < 3$, a więc $-2 < a < 4$. Rozwiązanie to jest

mniejsze od 5, gdy $9 - (a-1)^2 < 5$, czyli $(a-1)^2 > 4$, skąd $|a-1| > 2$, a więc $a < -1$ lub $a > 3$. Zatem w tym przypadku otrzymujemy $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$.

W rezultacie rozpatrzonych przypadków otrzymujemy

$$a \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \quad \text{i} \quad a \in (-2, -1) \cup (3, 4),$$

a więc

$$a \in (-2, -1) \cup (3, 4).$$

Zadanie 3. (3 pkt)

Obszar standardów	Opis wymagań
V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający posługuje się wzorami skróconego mnożenia: $(a \pm b)^2$, $(a \pm b)^3$, $a^2 - b^2$, $a^3 \pm b^3$ (2.a).

Zasady oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1p.

Zdający zapisze równanie $(a+1)^2 = (2b+1)^2$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2p.

Zdający zapisze wniosek $a = 2b$ (bez uzasadnienia lub z niepełnym uzasadnieniem)
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne..... 3p.

Zdający zapisze pełne uzasadnienie.

Zasady oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1p.

Zdający zapisze równanie $(a-2b)(a+2b) = -2(a-2b)$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2p.

Zdający zapisze wniosek $a = 2b$ (bez uzasadnienia lub z niepełnym uzasadnieniem)
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne..... 3p.

Zdający zapisze pełne uzasadnienie.

Zasady oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1p.

Zdający obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego $a^2 + 2a - 4b^2 - 4b$ np. zmiennej a , obliczy jego wyróżnik $\Delta = (4b + 2)^2$ i zapisze, że jest on nieujemny dla każdej wartości b albo, że jest on dodatni dla każdej wartości $b > 0$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2p.

Zdający obliczy pierwiastki trójmianu $a^2 + 2a - 4b^2 - 4b$: $a = -2 - 2b$ lub $a = 2b$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne..... 3p.

Zdający zapisze pełne uzasadnienie.

Uwaga

Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość równania jedynie dla wybranych wartości a i b , to otrzymuje **0 punktów**.

Przykładowe rozwiązanie**I sposób**

Zapisujemy równanie równoważne równaniu z założenia: $a^2 + 2a + 1 = 4b^2 + 4b + 1$. Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia i zapisujemy to równanie w postaci $(a + 1)^2 = (2b + 1)^2$. Oba wyrażenia w nawiasach są dodatnie, zatem równość kwadratów jest równoważna równości tych wyrażen, stąd $a + 1 = 2b + 1$ i dalej, $a = 2b$.

To kończy dowód.

II sposób

Przekształcamy założenie równoważnie:

$$\begin{aligned} a^2 - 4b^2 &= 4b - 2a \\ (a - 2b)(a + 2b) &= -2(a - 2b) \\ (a - 2b)(a + 2b + 2) &= 0. \end{aligned}$$

Liczby a i b są dodatnie, zatem $a + 2b + 2 \neq 0$. Stąd $a - 2b = 0$, czyli $a = 2b$.

To kończy dowód.

III sposób

Wyrażenie $a^2 + 2a - 4b^2 - 4b$ traktujemy jako trójmian kwadratowy jednej zmiennej np. a .

Wyróżnik trójmianu kwadratowego $a^2 + 2a - 4b^2 - 4b$ jest równy: $\Delta = (4b + 2)^2$.

Ten wyróżnik jest nieujemny dla każdej rzeczywistej wartości b .

Obliczamy pierwiastki tego trójmianu

$$a = -2 - 2b \text{ lub } a = 2b.$$

Ponieważ $b > 0$, więc liczba $-2 - 2b < 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że $a > 0$.

Zatem $a = 2b$.

To kończy dowód.

Zadanie 4. (3 pkt)

Obszar standardów	Opis wymagań
V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach, w tym umieszczonych w kontekście praktycznym (7.b).

Zasady oceniania I i II sposobu

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania

..... 1p.

Zdający:

- skorzysta z podobieństwa trójkątów i zapisze, np.: $|AD| = 3|KP|$ lub zapisze $|CP| = x$ i $|DP| = 2x$

albo

- skorzysta z twierdzenia o odcinkach stycznych i zapisze, np.: $|KM| = |KP|$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2p.

Zdający:

- skorzysta z podobieństwa trójkątów CPK i CMD i zapisze poprawne równanie pozwalające obliczyć długość odcinka PK : $\frac{|PK|}{2} = \frac{2x}{3x}$

albo

- skorzysta z podobieństwa trójkątów ADM i ACD oraz zapisze poprawne równanie z jedną niewiadomą, np. $\frac{4-t}{3t} = \frac{3t}{6}$, gdzie $t = |KM| = |KP|$

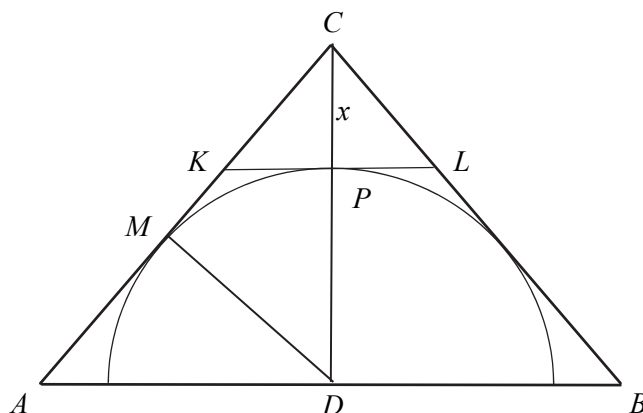
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne..... 3p.

Zdający rozwiąże powyższe równanie i uzasadni, że $|AM| : |MC| = 4 : 5$.

Przykładowe rozwiązanie**I sposób**

Najpierw uzupełnimy rysunek.



Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wnosimy, że odcinek KL jest równoległy do odcinka AB .

Oznaczmy środek odcinka KL przez P i niech $|CP| = x$.

Trójkąty CKP i CAD są podobne (cecha KKK) w skali $1:3$. Wtedy $|PD| = 2x$ i $|MD| = 2x$.

Trójkąty CPK i CMD są podobne (cecha KKK). Stąd $\frac{|PK|}{|CK|} = \frac{|MD|}{|CD|}$, czyli $\frac{|PK|}{2} = \frac{2x}{3x}$.

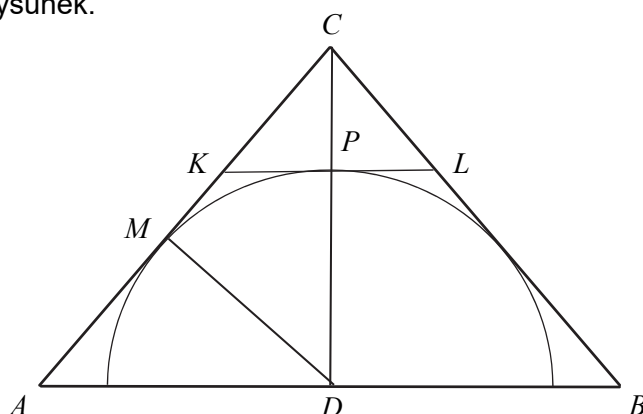
Stąd $|PK| = \frac{4}{3}$, więc $|AM| = \frac{8}{3}$ oraz $|MC| = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$.

Zatem $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{4}{5}$.

To kończy dowód.

II sposób

Najpierw uzupełnimy rysunek.



Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wnosimy, że odcinek KL jest równoległy do odcinka AB .

Niech punkt P będzie środkiem odcinka KL .

Zauważamy, że $|KM| = |KP|$, z twierdzenia o równości odcinków stycznych, łączących punkt leżący poza okręgiem z punktami styczności.

Niech $|KM| = |KP| = t$. Wtedy $|AD| = 3t$ i $|AM| = 4 - t$. Trójkąt ADM jest podobny do trójkąta ACD , na mocy cechy (ką, ką, ką); są to trójkąty prostokątne, a kąt MAD jest wspólny dla obu trójkątów.

Mozemy zatem zapisać równość:

$$\frac{|AM|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|AC|}, \text{ czyli } \frac{4-t}{3t} = \frac{3t}{6}, \text{ skąd otrzymujemy równanie } 9t^2 + 6t - 24 = 0.$$

Równanie to ma dwa rozwiązania: $t = -2, t = \frac{4}{3}$. Odrzucamy ujemne rozwiązanie tego równania.

$$\text{Zatem } t = \frac{4}{3}. \text{ Ostatecznie } \frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4 - \frac{4}{3}}{2 + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{4}{5}.$$

To kończy dowód.

Zadanie 5. (5 pkt)

Obszar standardów	Opis wymagań
V. Rozumowanie i argumentacja.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzory na n -ty wyraz i na sumę n -początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym (5.c).

Zasady oceniania I, II i III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania.....1p.

Zdający

- wykorzysta wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego lub własność ciągu geometrycznego i zapisze np.:

$$\circ a_2 = a_1q \text{ i } a_3 = a_1q^2$$

lub

$$\circ a_1 + a_1q + a_1q^2 = \frac{21}{4}$$

lub

$$\circ a_2^2 = a_1 \cdot a_3$$

albo

- wykorzysta wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego lub własność ciągu arytmetycznego i zapisze np.:

$$\circ (a_2 = a_3 + r \text{ i } a_1 = a_3 + 3r) \text{ lub } (b_2 = a_3 + r \text{ i } b_4 = a_3 + 3r) \text{ lub } (b_2 = b_1 + r \text{ i } b_4 = b_1 + 3r)$$

lub

$$\circ a_1 - a_2 = 2(a_2 - a_3) \text{ lub } b_4 - b_2 = 2(b_2 - b_1)$$

lub

$$\circ \quad b_3 = \frac{b_4 + b_2}{2} \quad \text{i} \quad b_2 = \frac{b_1 + b_3}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2p.

Zdający

- zapisze układ równań, z którego można otrzymać równanie z jedną niewiadomą, np.:

$$\circ \quad a_1 + a_1q + a_1q^2 = \frac{21}{4} \quad \text{i} \quad a_1 = a_1q^2 + 3(a_1q - a_1q^2)$$

lub

$$\circ \quad a_1 + a_1q + a_1q^2 = \frac{21}{4} \quad \text{i} \quad a_1q = \frac{\frac{a_1 + a_1q}{2} + a_1q^2}{2}$$

albo

- zapisze równanie pozwalające wyznaczyć związek między a_3 i r , np.:

$$(a_3 + r)^2 = (a_3 + 3r) \cdot a_3$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3p.

Zdający

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.: $2q^2 - 3q + 1 = 0$

albo

- zapisze $r = a_3$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne 4p.

Zdający

- rozwiąże równanie z jedną niewiadomą, np. $2q^2 - 3q + 1 = 0$: $q = 1$ lub $q = \frac{1}{2}$

albo

- obliczy trzeci wyraz ciągu geometrycznego (a_n) : $a_3 = \frac{3}{4}$

Rozwiązanie pełne..... 5 p.Zdający obliczy pierwszy wyraz ciągu geometrycznego $a_1 = 3$.**Uwagi**

1. Jeśli zdający zamienia (myli) własności ciągu geometrycznego z własnościami ciągu arytmetycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeśli zdający zapisuje tylko odpowiedź $a_1 = 3$, to otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeśli zdający odgadnie iloraz ciągu geometrycznego, a następnie obliczy na tej podstawie pierwszy wyraz tego ciągu, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
4. Jeśli zdający błędnie stosuje wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego (np. zapisuje $a_3 = a_1q^3$) lub ciągu arytmetycznego i korzysta z tego w rozwiązaniu, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
5. Jeśli zdający stosuje poprawną strategię rozwiązania zadania, a jedynymi błędami w rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to otrzymuje maksymalnie **4 punkty**.

6. Akceptujemy sytuacje, w których zdający dzieli obie strony zbudowanych przez siebie równań przez a_1 albo przez r , albo też przez $q-1$ bez zapisania jakiegokolwiek komentarza.
7. Jeżeli zdający rozwiąże równanie z jedną niewiadomą, np. $2q^2 - 3q + 1 = 0$: $q = 1$ lub $q = \frac{1}{2}$ oraz obliczy dwie wartości a_1 : $a_1 = 3$, $a_1 = \frac{7}{4}$ i nie odrzuci $a_1 = \frac{7}{4}$, to otrzymuje **4 punkty**.

Przykładowe rozwiązanie

I sposób

Sumując wyrazy ciągu geometrycznego otrzymujemy równość

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 = \frac{21}{4}. \quad (1)$$

Niech (b_n) będzie rosnącym ciągiem arytmetycznym.

Zatem $b_1 = a_1q^2$, $b_2 = a_1q$, $b_4 = a_1$, więc różnica tego ciągu $r = a_1q - a_1q^2$ oraz $b_4 = b_1 + 3r$, czyli $a_1 = a_1q^2 + 3(a_1q - a_1q^2)$.

Stąd wynika, że $a_1 = 3a_1q - 2a_1q^2$ i $a_1(2q^2 - 3q + 1) = 0$.

Ponieważ z równości (1) wynika, że $a_1 \neq 0$, więc $2q^2 - 3q + 1 = 0$. Zatem $q = 1$ lub $q = \frac{1}{2}$.

Dla $q = 1$ ciąg (a_n) jest stały. Stąd ciąg (b_n) też jest stały. Zatem tylko dla $q = \frac{1}{2}$ ciąg (b_n)

może być ciągiem rosnącym. Otrzymujemy wtedy $r = \frac{1}{4}a_1$. Z równości (1) otrzymujemy

$$a_1 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_1 = \frac{21}{4}, \text{ a stąd wynika, że } a_1 = 3.$$

II sposób

W ciągu arytmetycznym $b_1 = a_3$, $b_2 = a_3 + r$, $b_4 = a_3 + 3r$, gdzie $r > 0$.

Ponieważ ciąg $(a_3 + 3r, a_3 + r, a_3)$ jest ciągiem geometrycznym, więc zachodzi równość

$$(a_3 + r)^2 = (a_3 + 3r) \cdot a_3,$$

skąd wynika, że $a_3^2 + 2a_3r + r^2 = a_3^2 + 3a_3r$,

a zatem $r^2 = a_3r$.

Ponieważ z założenia $r > 0$, więc $r = a_3$. Podana suma trzech wyrazów jest zatem równa

$$4a_3 + 2a_3 + a_3 = \frac{21}{4}.$$

Otrzymujemy zatem $a_3 = \frac{3}{4}$. Wtedy $a_1 = b_4 = 4a_3 = 3$.

III sposób

Z danych w treści zadania wynikają równości:

$$b_1 = a_1q^2, \quad b_2 = a_1q, \quad b_4 = a_1.$$

Ponieważ (b_n) jest ciągiem arytmetycznym, więc możemy zapisać równości

$$b_3 = \frac{b_4 + b_2}{2} = \frac{a_1 + a_1q}{2}$$

oraz

$$b_2 = \frac{b_3 + b_1}{2} = \frac{\frac{a_1 + a_1q}{2} + a_1q^2}{2} = a_1q$$

Rozwiążemy równanie

$$\frac{\frac{a_1 + a_1q}{2} + a_1q^2}{2} = a_1q$$

Ponieważ $a_1 + a_1q + a_1q^2 = \frac{21}{4}$, więc możemy założyć, że $a_1 \neq 0$. Powyższe równanie jest zatem równoważne równaniu

$$\frac{\frac{1+q}{2} + q^2}{2} = q, \text{ czyli równaniu } 1 + q + 2q^2 = 4q.$$

Równanie kwadratowe $2q^2 - 3q + 1 = 0$ ma dwa rozwiązania: $q = 1$ oraz $q = \frac{1}{2}$.

Jeśli $q = 1$, to obydwa ciągi są ciągami stałymi. Zatem tylko dla $q = \frac{1}{2}$ ciąg (b_n) może być ciągiem rosnącym.

Z równości $a_1 + a_1q + a_1q^2 = \frac{21}{4}$ otrzymujemy równanie $\frac{7}{4}a_1 = \frac{21}{4}$, czyli $a_1 = 3$.

Zadanie 6. (4 pkt)

Obszar standardów	Opis wymagań
IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne (R6.e).

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania 1p.

Zdający doprowadzi równanie do postaci równoważnej, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna tego samego kąta, np.:

$$3 - 6\sin^2 x + 10 - 10\sin^2 x = 24\sin x - 3$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2p.

Zdający rozwiąże równanie kwadratowe $2t^2 + 3t - 2 = 0$: $t = -2$ oraz $t = \frac{1}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3p.

Zdający

- zapisze, że równanie $\sin x = -2$ nie ma rozwiązań i poda co najmniej jedną serię rozwiązań równania $\sin x = \frac{1}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą}$$

albo

- zapisze, że równanie $\sin x = -2$ nie ma rozwiązań i poda jedno rozwiązanie równania $\sin x = \frac{1}{2}$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

Rozwiązanie pełne..... 4p.

Zdający wyznaczy oba rozwiązania równania: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ oraz $x_2 = \frac{5\pi}{6}$.

Uwagi

1. Akceptujemy przybliżone rozwiązania elementarnych równań trygonometrycznych.
2. Jeżeli zdający wyznaczy poprawnie obydwa rozwiązania równania $\sin x = \frac{1}{2}$ należące do przedziału $(0, 2\pi)$ i nie zapisze komentarza dotyczącego równania $\sin x = -2$, to otrzymuje **4 punkty**.
3. Jeżeli zdający przed uzyskaniem równań elementarnych popełni błędy rachunkowe i otrzyma równania elementarne, z których co najmniej jedno ma dwie serie rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający przed uzyskaniem elementarnych równań trygonometrycznych popełni błąd polegający na niepoprawnym zastosowaniu wzoru na cosinus kąta podwojonego lub błąd polegający na podstawieniu w miejsce $\sin x$ wyrażenia $\sqrt{1 - \cos^2 x}$, ale otrzyma co najmniej jedno równanie typu $\sin x = a$, gdzie $a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, i konsekwentnie to równanie rozwiąże, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**. Jeżeli jednak zdający otrzyma co najmniej jedno równanie typu $\sin x = a$, gdzie $a \in \{-1, 0, 1\}$, i to równanie konsekwentnie rozwiąże, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający zapisze równanie $\sin x = \frac{2}{3} \cos^2 x$, równoważne równaniu $3 \cos 2x + 10 \cos^2 x = 24 \sin x - 3$, a następnie rozwiąże równanie $\frac{4}{9} \cos^4 x + \cos^2 x - 1 = 0$, otrzymując 4 rozwiązania tego równania należące do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = \frac{7}{6}\pi$, $x = \frac{11}{6}\pi$ i nie odrzuci „obcych” rozwiązań: $x = \frac{7}{6}\pi$, $x = \frac{11}{6}\pi$, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

Przykładowe rozwiązanie

Przekształcamy dane równanie w sposób równoważny:

$$\begin{aligned}3 \cos 2x + 10 \cos^2 x &= 24 \sin x - 3, \\3(1 - 2 \sin^2 x) + 10(1 - \sin^2 x) &= 24 \sin x - 3, \\3 - 6 \sin^2 x + 10 - 10 \sin^2 x &= 24 \sin x - 3, \\16 - 16 \sin^2 x &= 24 \sin x, \\16 \sin^2 x + 24 \sin x - 16 &= 0 \\2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 &= 0\end{aligned}$$

Niech $t = \sin x$. Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$\begin{aligned}2t^2 + 3t - 2 &= 0, \\ \Delta &= 3^2 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 + 16 = 25, \\ \sqrt{\Delta} &= 5, \\ t_1 &= \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2, \\ t_2 &= \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Równanie $\sin x = -2$ jest sprzeczne, a równanie $\sin x = \frac{1}{2}$ ma w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ dwa

rozwiązania: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ oraz $x_2 = \frac{5\pi}{6}$.

Zadanie 7. (4 pkt)

Obszar standardów	Opis wymagań
III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje wzory Viète'a (R3.a). 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe z parametrem, przeprowadza dyskusję i wyciąga z niej wnioski (R3.b).

Zasady oceniania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch części.

Pierwsza z nich polega na:

- rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0 : m \in R \setminus \{8\}$

albo

- sprawdzeniu, że dla każdej obliczonej wartości parametru m równanie $x^2 - (3m+2)x + 2m^2 + 7m - 15 = 0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste.

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

Druga część polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m , dla których jest spełniony warunek $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za drugą część rozwiązania:

1 punkt zdający otrzymuje za:

- obliczenie dwóch pierwiastków trójmianu $x^2 - (3m + 2)x + 2m^2 + 7m - 15$:

$$x_1 = m + 5 \text{ oraz } x_2 = 2m - 3.$$

albo

- przekształcenie wyrażenia $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2$ do postaci: $2(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2$ lub równoważnej, ale zawierającej jedynie zmienne $x_1 + x_2$ oraz $x_1 \cdot x_2$.

2 punkty zdający otrzymuje za:

- zapisanie równania $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$ w postaci równania z jedną niewiadomą m , np.:

$$2(m + 5)^2 + 5(m + 5)(2m - 3) + 2(2m - 3)^2 = 2$$

albo

- zapisanie równania $2(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 = 2$ w postaci równania z jedną niewiadomą m ,

$$\text{np.: } 2(3m + 2)^2 + 2m^2 + 7m - 15 = 2$$

3 punkty zdający otrzymuje za rozwiązanie równania $20m^2 + 31m - 9 = 0$:

$$m_1 = -\frac{9}{5} \text{ oraz } m_2 = \frac{1}{4}.$$

Uwagi

1. Jeżeli zdający zamienia wzory Viète'a przy przekształcaniu lewej strony równania $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający rozpatruje warunek $\Delta \geq 0$ i nie sprawdzi, że dla każdej z otrzymanych wartości parametru m równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający przekształci warunek $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$, otrzyma $2(x_1 + x_2)^2 + 3x_1x_2 = 2$ i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to za drugą część rozwiązania może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
4. Jeżeli zdający wykorzystuje niepoprawny wzór „kwadrat sumy dwóch wyrażeń jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń”, przekształci warunek $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$ do postaci $2(x_1 + x_2)^2 + 5x_1x_2 = 2$, i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to za drugą część rozwiązania może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający rozpatrując równość $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$ zmieni liczbę po prawej stronie i zapisze równanie, wynikające ze wzorów Viète'a, w postaci $2(3m + 2) + 2m^2 + 7m - 15 = 0$, pomijając wykładnik 2 potęgi o podstawie $(3m + 2)$, to za drugą część rozwiązania zadania może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

1. Równanie ma dwa różne rozwiązania, gdy wyróżnik trójmianu jest dodatni: $\Delta > 0$.

Obliczamy wyróżnik trójmianu:

$$\Delta = (-(3m+2))^2 - 4(2m^2 + 7m - 15) = m^2 - 16m + 64 = (m-8)^2.$$

$$(m-8)^2 > 0, \text{ gdy } m \neq 8.$$

Stąd wynika, że trójmian ma następujące pierwiastki:

$$x_1 = m+5 \text{ oraz } x_2 = 2m-3.$$

Mamy zatem rozwiązać równanie

$$2(m+5)^2 + 5(m+5)(2m-3) + 2(2m-3)^2 = 2.$$

To równanie doprowadzamy do postaci równoważnej:

$$20m^2 + 31m - 9 = 0.$$

Ma ono dwa rozwiązania:

$$m_1 = -\frac{9}{5} \text{ oraz } m_2 = \frac{1}{4}$$

Każde z otrzymanych rozwiązań jest różne od 8.

Warunki zadania spełniają dwie wartości parametru m : $m_1 = -\frac{9}{5}$ oraz $m_2 = \frac{1}{4}$.

II sposób

Przekształcamy równość $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$ w sposób równoważny:

$$2(x_1^2 + x_2^2) + 5x_1x_2 = 2,$$

$$2((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2) + 5x_1x_2 = 2,$$

$$2(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 = 2.$$

Ze wzorów Viète'a wynika, że

$$x_1 + x_2 = 3m + 2 \text{ oraz } x_1x_2 = 2m^2 + 7m - 15,$$

o ile pierwiastki x_1 i x_2 trójmianu istnieją.

Mamy zatem rozwiązać równanie

$$2(3m+2)^2 + 2m^2 + 7m - 15 = 2.$$

To równanie doprowadzamy do postaci równoważnej

$$20m^2 + 31m - 9 = 0.$$

Ma ono dwa rozwiązania:

$$m_1 = -\frac{9}{5} \text{ oraz } m_2 = \frac{1}{4}.$$

Pozostaje sprawdzić, czy dla tych wartości m dany trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki. Możemy, tak jak w sposobie pierwszym, obliczyć wyróżnik i przekonać się, że jest on nieujemny. Możemy także podstawić znalezione wartości parametru m do danego trójmianu i przekonać się, że otrzymane trójmiany mają dwa różne pierwiastki.

Po podstawieniu $m = -\frac{9}{5}$ otrzymamy trójmian:

$$x^2 + \frac{17}{5}x - \frac{528}{25}.$$

Po podstawieniu $m = \frac{1}{4}$ otrzymamy trójmian:

$$x^2 + \frac{11}{4}x - \frac{105}{8}.$$

Oba trójmiany mają dwa różne pierwiastki. Można się o tym przekonać, obliczając wyróżniki lub zauważając, że oba trójmiany mają dodatni współczynnik przy x^2 i ujemny wyraz wolny.

Warunki zadania spełniają dwie wartości parametru m :

$$m_1 = -\frac{9}{5} \text{ oraz } m_2 = \frac{1}{4}.$$

Zadanie 8. (4 pkt)

Obszar standardów	Opis wymagań
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów (R7.d).

Zasady oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki,

ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1p.

Zdający obliczy długości odcinków CP i PB oraz wyznaczy miary kątów BAC i CAB : $|CP| = 6$, $|PB| = 4$, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BAC| = 30^\circ$ oraz $|\sphericalangle ACB| = 120^\circ$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2p.

Zdający obliczy długość odcinka AP : $|AP| = 14$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3p.

Zdający zapisze związek, z którego może obliczyć $\sin \alpha$, np.: $\frac{4}{\sin \alpha} = \frac{14}{\sin 30^\circ}$.

Rozwiązanie pełne 4p.

Zdający obliczy sinus kąta α : $\sin \alpha = \frac{1}{7}$.

Zasady oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki,

ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1p.

Zdający obliczy długości odcinków CP i PB oraz wyznaczy miary kątów BAC i CAB : $|CP| = 6$, $|PB| = 4$, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BAC| = 30^\circ$ oraz $|\sphericalangle ACB| = 120^\circ$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2p.

Zdający obliczy długość odcinka AP : $|AP| = 14$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3p.

Zdający obliczy długości odcinków AP i PR $|AP| = 14$, $|PR| = 2$.

Rozwiązanie pełne 4p.

Zdający obliczy sinus kąta α : $\sin \alpha = \frac{1}{7}$.

Zasady oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki,

ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1p.

Zdający obliczy długość odcinka PB

oraz zauważy, że miary kątów ACD i BCD są równe 60° : $|PB| = 4$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2p.

Zdający obliczy długość odcinka AR : $|AR| = 8\sqrt{3}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3p.

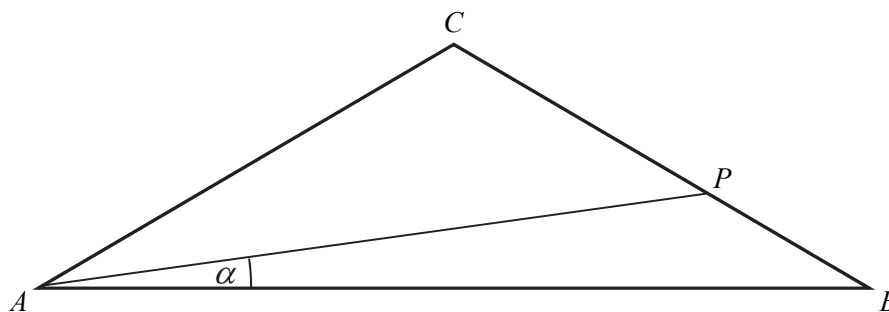
Zdający obliczy długości odcinków AP i PR $|AP| = 14$, $|PR| = 2$.

Rozwiązanie pełne 4p.

Zdający obliczy sinus kąta α : $\sin \alpha = \frac{1}{7}$.

Przykładowe rozwiązania

I sposób



Oznaczamy $|\sphericalangle PAB| = \alpha$. Ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BAC| = 30^\circ \text{ oraz } |\sphericalangle ACB| = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ.$$

Długości odcinków CP i PB są równe:

$$|CP| = \frac{3}{5} \cdot 10 = 6 \text{ oraz } |PB| = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4.$$

Z twierdzenia cosinusów w trójkącie APC otrzymujemy

$$|AP|^2 = |AC|^2 + |CP|^2 - 2|AC| \cdot |CP| \cdot \cos 120^\circ,$$

$$|AP|^2 = 100 + 36 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \sin(-30^\circ),$$

$$|AP|^2 = 196, \text{ czyli } |AP| = 14.$$

Z twierdzenia sinusów w trójkącie ABP otrzymujemy

$$\frac{|PB|}{\sin \alpha} = \frac{|AP|}{\sin 30^\circ},$$

$$\frac{4}{\sin \alpha} = \frac{14}{\frac{1}{2}},$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{7}.$$

Uwaga

Zdający może obliczyć długość boku AB , wykorzystując np. twierdzenie cosinusów w trójkącie ABC

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2|AC| \cdot |BC| \cdot \cos 120^\circ,$$

$$|AB|^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$|AB|^2 = 300,$$

$$|AB|^2 = 300,$$

$$|AB| = 10\sqrt{3}.$$

Ponownie z twierdzenia cosinusów w trójkącie ABP

$$|PB|^2 = |AP|^2 + |AB|^2 - 2|AP| \cdot |AB| \cdot \cos \alpha,$$

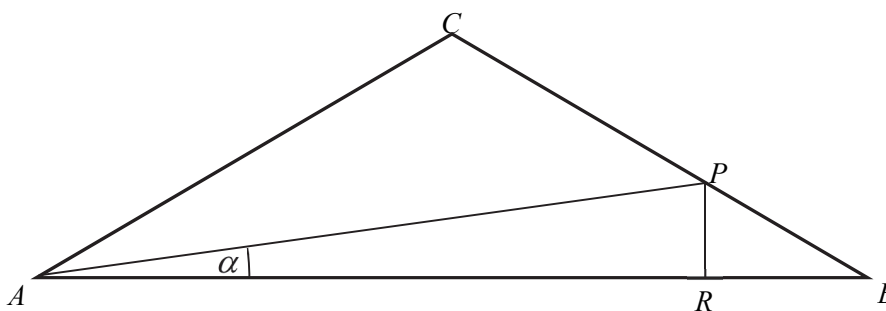
$$4^2 = 14^2 + (10\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 14 \cdot 10\sqrt{3} \cdot \cos \alpha,$$

$$\cos \alpha = \frac{196 + 300 - 16}{2 \cdot 14 \cdot 10\sqrt{3}} = \frac{480}{280\sqrt{3}} = \frac{12}{7\sqrt{3}}.$$

Ponieważ α jest kątem ostrym, więc

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{7\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{144}{147}} = \sqrt{\frac{3}{147}} = \frac{1}{7}.$$

II sposób



Oznaczamy $|\sphericalangle PAB| = \alpha$ oraz R będzie rzutem prostokątnym punktu P na podstawę AB trójkąta ABC . Ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BAC| = 30^\circ \text{ oraz } |\sphericalangle ACB| = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ.$$

Długości odcinków CP i PB są równe:

$$|CP| = \frac{3}{5} \cdot 10 = 6 \text{ oraz } |PB| = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4.$$

Z twierdzenia cosinusów w trójkącie APC obliczamy długość odcinka AP :

$$|AP|^2 = |AC|^2 + |CP|^2 - 2|AC| \cdot |CP| \cdot \cos 120^\circ,$$

$$|AP|^2 = 100 + 36 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \sin(-30^\circ),$$

$$|AP|^2 = 196, \text{ czyli } |AP| = 14.$$

Trójkąt PBR jest połową trójkąta równobocznego, więc

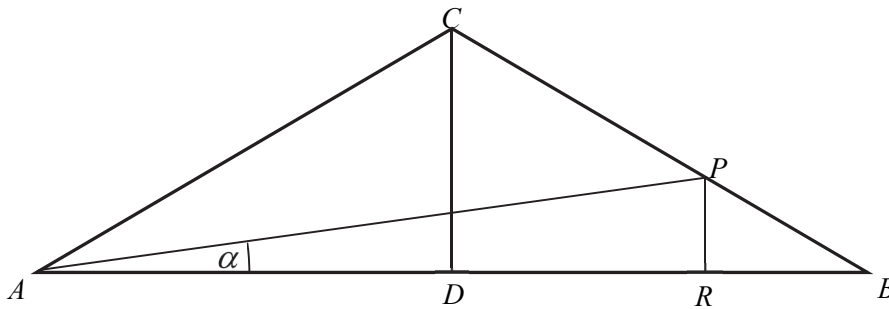
$$|PR| = \frac{1}{2}|PB| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

Zatem

$$\sin \alpha = \frac{|PR|}{|AP|} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}.$$

III sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Zauważmy, że trójkąt ABC składa się z dwóch „połówek” trójkątów równobocznych o boku długości 10, więc

$$|AD| = \frac{|AC|\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}.$$

Długości odcinków CP i PB są równe:

$$|CP| = \frac{3}{5} \cdot 10 = 6 \text{ oraz } |PB| = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4.$$

Trójkąt BPR także jest połową trójkąta równobocznego, więc

$$|PR| = \frac{|BP|}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ oraz } |BR| = |PR|\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

Zatem

$$|AR| = |AB| - |BR| = 10\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie APR otrzymujemy

$$|AP| = \sqrt{|AR|^2 + |PR|^2} = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{196} = 14.$$

Zatem

$$\sin \alpha = \frac{|PR|}{|AP|} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}.$$

Uwaga

Po obliczeniu długości odcinków PR i AR , możemy obliczyć tangens kąta α

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|PR|}{|AR|} = \frac{2}{8\sqrt{3}} = \frac{1}{4\sqrt{3}},$$

a następnie, wykorzystując związki między funkcjami trygonometrycznymi, możemy obliczyć sinus tego kąta.

Zadanie 9. (5 pkt)

Obszar standardów	Opis wymagań
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający stosuje własności figur podobnych i jednokładnych w zadaniach, także umieszczonych w kontekście praktycznym (R7.c). 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ (8.g).

Zasady oceniania I, II, III, IV i V sposobu rozwiązania

Rozwiązanie składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap polega na wyznaczeniu współrzędnych środka danego okręgu. Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Drugi etap polega na wyznaczeniu równania/układu równań prowadzących do wyznaczenia współrzędnych środka jednokładności oraz współrzędnych środka obrazu danego okręgu w tej jednokładności.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **4 punkty**.

Podział punktów za pierwszy etap rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 punkt, gdy

- zapisze współrzędne środka: $P = (4, 3)$

lub

- zapisze równanie okręgu $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 8 = 0$ w postaci $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 17$.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania

Zdający otrzymuje

1 punkt, gdy

- obliczy i zapisze współrzędne punktów K i L : $K = (3, 7)$ i $L = (8, 2)$

albo

- obliczy odległość punktu P od prostej o równaniu $x + y - 10 = 0$: $d = |SP| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

albo

- zapisze równanie prostej przechodzącej przez punkt $P = (4, 3)$ prostopadłej do prostej $x + y - 10 = 0$: $x - y - 1 = 0$

albo

- poda tylko promień obrazu okręgu: $R = 3\sqrt{17}$,

i na tym zakończy lub dalej popelni błędy.

Zdający otrzymuje
2 punkty, gdy

- zapisze współrzędne środka jednokładności: $S = \left(\frac{11}{2}, \frac{9}{2}\right)$

albo

- zapisze $P' = (x, x-1)$ i zapisze $|SP'| = 3 \cdot |SP| = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popelni błędy.

Zdający otrzymuje
3 punkty, gdy

- zapisze równanie, wynikające z równości $\vec{SP}' = -3 \cdot \vec{SP}$, prowadzące do wyznaczenia współrzędnych środka $P' = (a, b)$ okręgu, będącego obrazem punktu $P = (4, 3)$ w jednokładności:

$$\left[a - \frac{11}{2}, b - \frac{9}{2} \right] = -3 \cdot \left[4 - \frac{11}{2}, 3 - \frac{9}{2} \right]$$

albo

- wykona poprawne podstawienie do odpowiedniego wzoru w zestawie *Wybranych wzorów matematycznych* i zapisze:

$$a = -3 \cdot 4 + (1 - (-3)) \cdot \frac{11}{2} \quad \text{oraz} \quad b = -3 \cdot 3 + (1 - (-3)) \cdot \frac{9}{2}$$

albo

- zapisze równanie, wynikające z równości $\vec{PP}' = -4 \cdot \vec{SP}$, prowadzące do wyznaczenia współrzędnych środka $P' = (a, b)$ okręgu, będącego obrazem punktu $P = (4, 3)$ w tej jednokładności:

$$[a - 4, b - 3] = -4 \cdot \left[4 - \frac{11}{2}, 3 - \frac{9}{2} \right]$$

albo

- zapisze równanie $\sqrt{(a-4)^2 + (a-1-3)^2} = 6\sqrt{2}$

albo

- zapisze równanie $\frac{|a+a-1-10|}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popelni błędy.

Zdający otrzymuje
4 punkty, gdy zapisze równanie szukanego okręgu

$$(x-10)^2 + (y-9)^2 = 153.$$

Uwagi:

1. Jeśli zdający realizuje poprawną strategię rozwiązania zadania, a jedynymi błędami w rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to za takie rozwiązanie otrzymuje co najwyżej **4 punkty**.

2. Jeśli zdający zakłada błędnie, że środkiem jednokładności jest środek danego okręgu, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za drugą część rozwiązania.
3. Jeśli zdający podczas obliczania współrzędnych punktów K , L lub S popełnia błąd polegający na zamianie współrzędnych i konsekwentnie do tego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **4 punkty**.
4. Jeśli zdający stosuje błędne równanie $\vec{SP} = -3 \cdot \vec{SP}'$ i konsekwentnie do tego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty** za drugą część rozwiązania.
5. Jeśli zdający zakłada błędnie, że trójkąt KLP jest trójkątem prostokątnym i w rozwiązaniu stosuje tę własność, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za drugą część rozwiązania.
6. Jeżeli zdający narysuje w układzie współrzędnych dany okrąg i daną prostą, a następnie wyznaczy graficznie obraz środka P' danego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k = -3$ oraz zapisze równanie tego otrzymanego okręgu, to może otrzymać **4 punkty** za drugą część rozwiązania.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 17$.

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt $P = (4, 3)$, a promień okręgu jest równy $r = \sqrt{17}$.

Obliczamy współrzędne punktów K i L rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 6y + 8 = 0 \\ y = 10 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (10-x)^2 - 8x - 6(10-x) + 8 = 0 \\ y = 10 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 11x + 24 = 0 \\ y = 10 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Zatem $K = (3, 7)$ i $L = (8, 2)$.

Środek cięciwy KL , który jest środkiem jednokładności to punkt $S = \left(\frac{11}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k = -3$ jest okrąg o promieniu

$R = 3\sqrt{17}$ oraz środka $P' = (a, b)$ takim, że $\vec{SP}' = -3 \cdot \vec{SP}$. Otrzymujemy równość:

$$\left[a - \frac{11}{2}, b - \frac{9}{2} \right] = -3 \cdot \left[4 - \frac{11}{2}, 3 - \frac{9}{2} \right]$$

Zatem

$$\left[a - \frac{11}{2}, b - \frac{9}{2} \right] = \left[\frac{9}{2}, \frac{9}{2} \right],$$

a stąd $a = 10$ i $b = 9$.

Szukany okrąg ma równanie $(x-10)^2 + (y-9)^2 = 153$.

Uwaga

Zdający może z równania prostej wyznaczyć $x = 10 - y$ i wtedy otrzyma $\begin{cases} 2y^2 - 18y + 28 = 0 \\ x = 10 - y \end{cases}$.

II sposób

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 17$.

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt $P = (4, 3)$, a promień okręgu jest równy $r = \sqrt{17}$.

Obliczamy współrzędne punktów K i L rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 6y + 8 = 0 \\ y = 10 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (10 - x)^2 - 8x - 6(10 - x) + 8 = 0 \\ y = 10 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 11x + 24 = 0 \\ y = 10 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$$

Zatem $K = (3, 7)$ i $L = (8, 2)$. Środek cięciwy KL , który jest środkiem jednokładności to punkt

$$S = \left(\frac{11}{2}, \frac{9}{2} \right).$$

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k = -3$ jest okrąg o promieniu

$R = 3\sqrt{17}$ oraz środka $P' = (a, b)$ takim, że $\vec{PP'} = -4 \cdot \vec{SP}$. Otrzymujemy zatem równość:

$$[a - 4, b - 3] = -4 \cdot \left[4 - \frac{11}{2}, 3 - \frac{9}{2} \right]$$

Zatem

$$[a - 4, b - 3] = [6, 6],$$

a stąd $a = 10$ i $b = 9$.

Szukany okrąg ma równanie $(x-10)^2 + (y-9)^2 = 153$.

III sposób

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 17$.

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt $P = (4, 3)$, a promień okręgu jest równy $r = \sqrt{17}$.

Wyznaczamy równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P = (4, 3)$ i prostopadłej do danej prostej $x + y - 10 = 0$. Prosta l ma zatem równanie $x - y - 1 = 0$. Środek jednokładności S jest

punktem wspólnym obu tych prostych, więc jego współrzędne obliczamy rozwiązując układ

$$\text{równań } \begin{cases} x + y - 10 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Stąd } S = \left(\frac{11}{2}, \frac{9}{2} \right).$$

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k = -3$ jest okrąg o promieniu

$R = 3\sqrt{17}$ oraz środka $P' = (a, b)$ takim, że $\vec{SP'} = -3 \cdot \vec{SP}$. Otrzymujemy zatem równość:

$$\left[a - \frac{11}{2}, b - \frac{9}{2} \right] = -3 \cdot \left[4 - \frac{11}{2}, 3 - \frac{9}{2} \right]$$

Zatem

$$\left[a - \frac{11}{2}, b - \frac{9}{2} \right] = \left[\frac{9}{2}, \frac{9}{2} \right],$$

a stąd $a = 10$ i $b = 9$.

Szukany okrąg ma równanie $(x-10)^2 + (y-9)^2 = 153$.

IV sposób

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 17$.

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt $P = (4, 3)$, a promień okręgu jest równy $r = \sqrt{17}$.

Obliczamy odległość d punktu P od danej prostej o równaniu $x + y - 10 = 0$.

$$d = \frac{|1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 - 10|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k = -3$ jest okrąg o promieniu $R = 3\sqrt{17}$ oraz środka $P' = (a, b)$.

Zauważamy, że $|PP'| = 4 \cdot d$, zatem $|PP'| = 6\sqrt{2}$. Wyznaczamy równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P = (4, 3)$ i prostopadłej do danej prostej $x + y - 10 = 0$. Prosta l ma zatem równanie $x - y - 1 = 0$. Ponieważ punkt $P' = (a, b)$ leży na tej prostej prostopadłej, więc $P' = (a, a-1)$. Stąd otrzymujemy kolejno

$$\sqrt{(a-4)^2 + (a-1-3)^2} = 6\sqrt{2}$$

$$(a-4)^2 + (a-4)^2 = 36 \cdot 2$$

$$(a-10)(a+2) = 0,$$

skąd $a = 10$ lub $a = -2$.

Ponieważ skala jednokładności $k = -3$, więc jednokładność jest odwrotna. Zatem $a = -2$ nie spełnia warunków zadania. Stąd $P' = (10, 9)$.

Szukany okrąg ma równanie $(x-10)^2 + (y-9)^2 = 153$.

V sposób

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 17$.

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt $P = (4, 3)$, a promień okręgu jest równy $r = \sqrt{17}$. Obliczamy odległość d punktu P od danej prostej o równaniu $x + y - 10 = 0$.

$$d = \frac{|1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 - 10|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k = -3$ jest okrąg o promieniu $R = 3\sqrt{17}$ oraz środku $P' = (a, b)$.

Wyznaczamy równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P = (4, 3)$ i prostopadłej do danej prostej $x + y - 10 = 0$. Prosta l ma zatem równanie $x - y - 1 = 0$. Ponieważ punkt $P' = (a, b)$ leży na tej prostej prostopadłej, więc $P' = (a, a - 1)$.

Skala jednokładności $k = -3$, więc $|SP'| = |-3| \cdot d = 3 \cdot d$, zatem $|SP'| = \frac{9\sqrt{2}}{2}$.

Obliczamy odległość punktu $P' = (a, a - 1)$ od danej prostej o równaniu $x + y - 10 = 0$

$$|SP'| = \frac{|a + a - 1 - 10|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|2a - 11|}{\sqrt{2}} = \frac{|2a - 11|\sqrt{2}}{2}.$$

Otrzymujemy równanie

$$\frac{|2a - 11|\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

$$|2a - 11| = 9$$

Jednokładność jest odwrotna, zatem $a = 10$. Stąd $P' = (10, 9)$.

Szukany okrąg ma równanie: $(x - 10)^2 + (y - 9)^2 = 153$.

Zadanie 10. (5 pkt)

Obszar standardów	Opis wymagań
IV. Użycie i tworzenie strategii.	4. Funkcje. Zdający rozwiązuje zadania (również umieszczone w kontekście praktycznym), prowadzące do badania funkcji kwadratowej (4.1)

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym jest niewielki postęp, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1p.

Zdający zauważy, że pole trójkąta APQ jest różnicą pola kwadratu $ABCD$ i sumy pól trzech trójkątów prostokątnych: ABP , QCP , ADQ

$$P_{APQ} = P_{ABCD} - (P_{ABP} + P_{ADQ} + P_{QCP}).$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2p.

Zdający zapisze pole trójkąta APQ jako funkcję zmiennej x

$$f(x) = 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2-x) - \frac{1}{2} \cdot x \cdot (2-x) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3p.

Zdający zapisze wzór funkcji f w postaci $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$ i wyznaczy dziedzinę funkcji f $(0, 2)$.

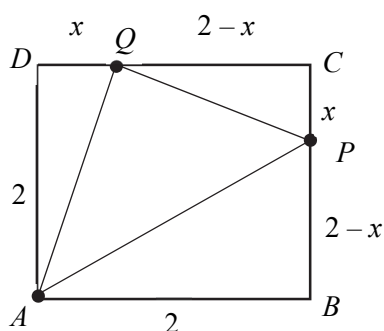
Rozwiązanie prawie pełne 4p.

Zdający wyznaczy argument x , dla którego funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą: $x = 1$ lub rozwiąże zadanie do końca, ale z błędami rachunkowymi.

Rozwiązanie pełne 5p.

Zdający obliczy pole trójkąta APQ : $f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 1 + 2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

Przykładowe rozwiązanie



Pole trójkąta APQ jest różnicą pola kwadratu $ABCD$ i sumy pól trzech trójkątów prostokątnych: ABP , QCP , ADQ

$$P_{APQ} = P_{ABCD} - (P_{ABP} + P_{ADQ} + P_{QCP})$$

Pole kwadratu $ABCD$ i trójkątów ABP , QCP , ADQ są równe odpowiednio:

$$P_{ABCD} = 2^2 = 4,$$

$$P_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2-x),$$

$$P_{QCP} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (2-x),$$

$$P_{ADQ} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x.$$

Stąd wynika, że pole trójkąta APQ , jako funkcja f zmiennej x , jest równe

$$f(x) = 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2-x) - \frac{1}{2} \cdot x \cdot (2-x) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x, \text{ gdzie } x \in (0, 2).$$

Przekształcając równoważnie wzór funkcji f możemy zapisać w postaci: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$.

Najmniejsza wartość funkcja f przyjmuje dla argumentu $x=1$.

$$\text{Stąd } f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 1 + 2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Dla $x=1$ pole trójkąta APQ jest najmniejsze i równe $\frac{3}{2}$.

Zadanie 11. (4 pkt)

Obszar standardów	Opis wymagań
III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej; teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych (R10).

Zasady oceniania i sposobu rozwiązania

Rozwiązanie składa się z następujących części.

Pierwsza polega na wyróżnieniu trzech przypadków i dodaniu – w końcowej fazie rozwiązania – otrzymanych trzech wyników.

Druga część polega na zapisaniu liczby rozważanych w każdym przypadku liczb i obliczeniu liczby tych liczb.

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1p.

Zdający

- poprawnie wskaże trzy przypadki

albo

- pominie jeden z przypadków, ale zapisze liczbę liczb rozważanych w jednym

$$\text{przykładu, np.: } \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 8^2 \text{ lub } \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot 8^2 \text{ lub } 7 \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 8$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2p.

Zdający poprawnie wskaże trzy przypadki oraz zapisze liczbę liczb rozważanych w jednym przypadku lub pominie jeden przypadek, zapisze liczbę liczb w dwóch wskazanych przez siebie przypadkach.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3p.

Zdający poprawnie wskaże trzy przypadki i zapisze liczbę liczb rozważanych w dwóch przypadkach.

Rozwiązanie pełne 4p.

Zdający poprawnie wskaże trzy przypadki i poprawnie obliczy liczbę rozważanych liczb: 12960.

Uwagi

1. Rozwiązanie uznajemy za pełne, jeżeli zdający zapisze liczbę rozpatrywanych liczb siedmiocyfrowych bez użycia symbolu Newtona oraz symbolu silni.
2. Jeśli zdający w każdym z trzech rozpatrywanych przypadków poprawnie zapisze jedynie liczbę sposobów rozmieszczenia:
 - cyfry 1 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry 2lub
 - cyfry 1 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry innej niż 1 i 2lub
 - cyfry 2 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry innej niż 1 i 2,to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

Zasady oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie składa się z dwóch części.

Pierwsza polega na obliczeniu liczby wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ oraz liczby tych spośród nich, których pierwszą cyfrą jest 0.

Druga część polega na obliczeniu liczby szukanych liczb.

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1p.

Zdający zapisze, że

- liczbę wszystkich szukanych liczb można obliczyć, odejmując od liczby wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ liczbę tych spośród nich, których pierwszą cyfrą jest 0 lub z rozwiązania wynika, że zdający w ten sposób ustala liczbę szukanych liczb

albo

- wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru

$$\{0,3,4,5,6,7,8,9\} \text{ jest } \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 8^2$$

albo

- wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, których pierwszą cyfrą jest 0 oraz w których zapisie występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie jedna cyfra

$$\text{ze zbioru } \{0,3,4,5,6,7,8,9\} \text{ jest } \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 8$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2p.

Zdający zapisze, że

- liczbę wszystkich szukanych liczb można obliczyć, odejmując od liczby wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ liczbę tych spośród nich, których pierwszą cyfrą jest 0 lub z rozwiązania wynika, że zdający w ten sposób ustala liczbę szukanych liczb

oraz

wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru

$$\{0,3,4,5,6,7,8,9\} \text{ jest } \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 8^2$$

albo

- liczbę wszystkich szukanych liczb można obliczyć, odejmując od liczby wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ liczbę tych spośród nich, których pierwszą cyfrą jest 0 lub z rozwiązania wynika, że zdający w ten sposób ustala liczbę szukanych liczb

oraz

wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, których pierwszą cyfrą jest 0 oraz w których zapisie występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie jedna cyfra

$$\text{ze zbioru } \{0,3,4,5,6,7,8,9\} \text{ jest } \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 8$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania **3p.**

Zdający zapisze, że

wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1,

dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ jest $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 8^2$

oraz

wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, których pierwszą cyfrą jest 0 oraz w których zapisie występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie jedna cyfra ze zbioru

$$\{0,3,4,5,6,7,8,9\} \text{ jest } \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 8$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne **4p.**

Zdający poprawnie obliczy liczbę rozważanych liczb: 12960.

Uwagi

1. Rozwiązanie uznajemy za pełne, jeżeli zdający zapisze liczbę rozpatrywanych liczb siedmiocyfrowych bez użycia symbolu Newtona oraz symbolu silni.
2. Jeśli zdający, obliczając liczbę wszystkich szukanych liczb metodą opisaną w II sposobie rozwiązania, poprawnie zapisze jedynie liczbę sposobów rozmieszczenia w całej I części rozwiązania:
 - cyfry 1 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry 2

lub

- cyfry 1 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry innej niż 1 i 2

lub

- cyfry 2 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry innej niż 1 i 2, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Rozważamy trzy przypadki.

- I. Pierwszą cyfrą rozpatrywanej liczby jest 1. Wtedy na następnych sześciu miejscach znajdują się dokładnie dwie cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$. Takich liczb istnieje

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 8^2 = 15 \cdot 6 \cdot 64 = 5760.$$

- II. Pierwszą cyfrą rozpatrywanej jest 2. Wtedy na następnych sześciu miejscach znajdują się dokładnie trzy cyfry 1, dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$. Takich liczb istnieje

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot 8^2 = 20 \cdot 3 \cdot 64 = 3840.$$

- III. Pierwsza cyfra rozpatrywanej liczby jest różna od 1 i od 2. Pierwsza cyfra jest też różna od 0. Zatem na pierwszym miejscu stoi jedna z siedmiu cyfr ze zbioru $\{3,4,5,6,7,8,9\}$. Wtedy na następnych sześciu miejscach znajdują się dokładnie trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie jedna cyfra ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$. Takich liczb istnieje

$$7 \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 8 = 7 \cdot 20 \cdot 3 \cdot 8 = 3360.$$

Łącznie istnieje zatem $5760+3840+3360=12960$ rozważanych liczb.

Istnieje 12960 siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2.

II sposób

Zliczamy wszystkie „liczby” siedmiocyfrowe, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$. Wtedy na siedmiu miejscach znajdują się dokładnie trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Takich „liczb” jest

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 8^2 = 35 \cdot 6 \cdot 64 = 13440.$$

Następnie zliczamy wszystkie „liczby” siedmiocyfrowe, których pierwszą cyfrą jest 0 oraz w których zapisie występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie jedna cyfra ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Takich „liczb” jest

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 8 = 20 \cdot 3 \cdot 8 = 480.$$

Jest zatem $13440 - 480 = 12960$ rozważanych liczb.

Zadanie 12. (6 pkt)

Obszar standardów	Opis wymagań
IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii (9.b). 7. Planimetria. Zdający stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu (R9.a).

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1p.

Zdający:

- zapisze, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w trapez $ABCD$ lub z rozwiązania wynika, że zdający tę własność stosuje, np.: zapisze $|AB| + |CD| = 10 + 16$

albo

- obliczy wysokość trapezu $ABCD$: $h = |CE| = 8$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2p.

Zdający:

- zapisze, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w trapez $ABCD$ lub z rozwiązania wynika, że zdający tę własność stosuje, np.: zapisze $|AB| + |CD| = 10 + 16$ i obliczy wysokość trapezu $ABCD$: $h = |CE| = 8$

albo

- obliczy wysokość trapezu $ABCD$: $h = |CE| = 8$ i wysokość tego ostrosłupa $H = 18$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym dokonano istotnego postępu, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania..... 3p.

Zdający:

- zapisze, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w trapez $ABCD$ lub z rozwiązania wynika, że zdający tę własność stosuje, np.: zapisze $|AB| + |CD| = 10 + 16$ oraz obliczy wysokość tego ostrosłupa $H = 18$

albo

- obliczy pole podstawy tego ostrosłupa: $P_{ABCD} = 104$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 4p.

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa $H = 18$ i pole jego podstawy: $P_{ABCD} = 104$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie zadania do końca z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozumowania (np. błędy rachunkowe, błędy w przepisaniu, itp.) 5p.

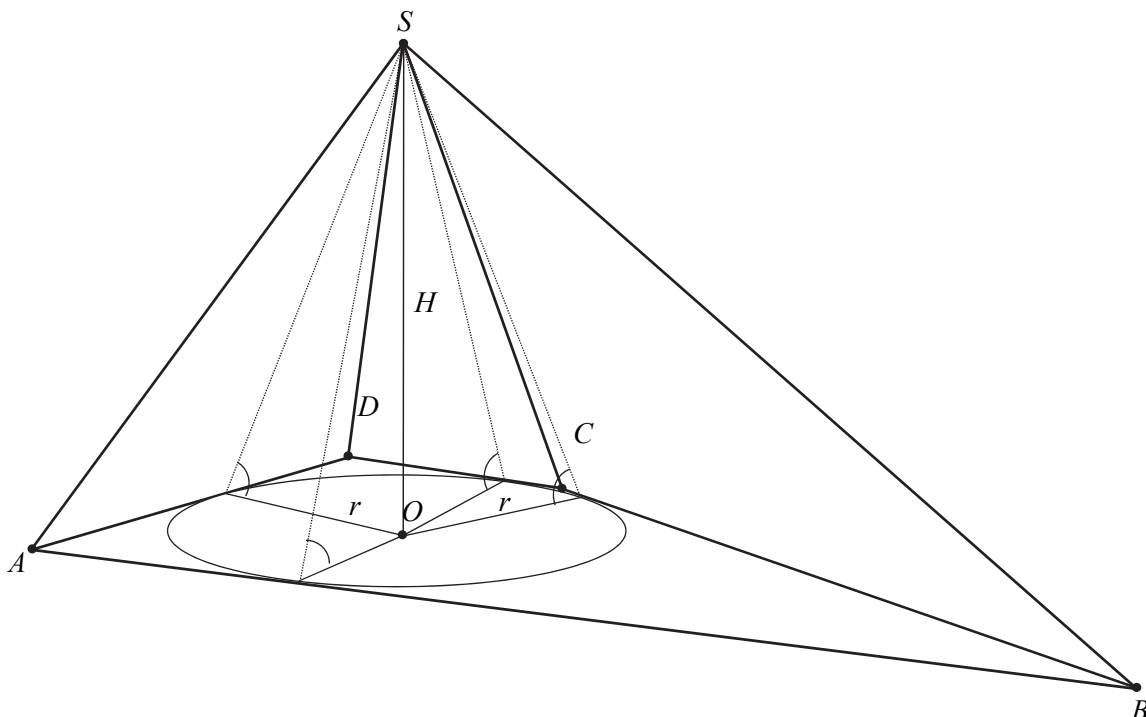
Rozwiązanie pełne..... 6p.

Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V = 624$.

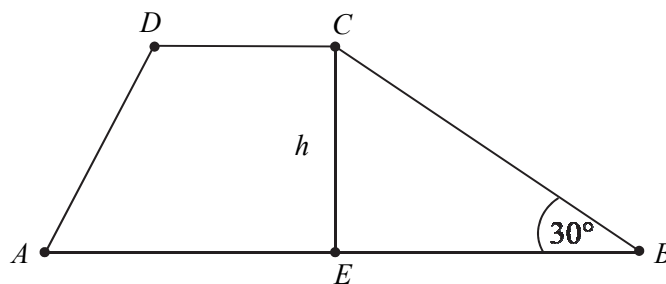
Uwaga.

1. Jeżeli zdający we wzorze na objętość ostrosłupa pominie czynnik $\frac{1}{3}$, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **5 punktów**.
2. Jeżeli zdający popełni błąd polegający na niepoprawnym zastosowaniu definicji funkcji tangens, np.: przyjmie, że jest to stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **4 punkty**.
3. Jeżeli zdający popełni błąd polegający na tym, że niepoprawnie ustali związki między długościami boków trójkąta prostokątnego o kątach ostrych 30° i 60° , np. przyjmie, że wysokość trapezu to $8\sqrt{3}$, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **4 punkty**.
4. Jeżeli zdający błędnie przyjmuje, że trapez $ABCD$ jest równoramienny lub przyjmie, że podstawy tego trapezu mają długości 16 i 10, to za całe rozwiązanie może trzymać co najwyżej **1 punkt**.

Przykładowe rozwiązanie



Ponieważ w tym ostrosłupie wszystkie ściany boczne nachylone są do podstawy pod tym samym kątem, więc spodek O wysokości H ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w wielokąt będący podstawą ostrosłupa. Niech r oznacza promień okręgu wpisanego w podstawę, h – wysokość trapezu $ABCD$, H natomiast niech oznacza wysokość ostrosłupa.



Ponieważ w trapez można wpisać okrąg, więc spełniony jest warunek: $|AB| + |CD| = 26$.
Korzystając z własności trójkąta prostokątnego EBC o kątach 30° , 60° , 90° , otrzymujemy:

$$h = |CE| = 8, \text{ a stąd wynika, że } r = 4.$$

Ponieważ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{2}$, więc $\frac{9}{2} = \frac{H}{r}$ i stąd obliczamy $H = 18$.

Objętość tego ostrosłupa jest zatem równa

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_{ABCD} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot h \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{26}{2} \cdot 8 \cdot 18 = 624.$$