

Miejsce
na naklejkę
z kodem szkoły

dysleksja

MMA-R1A1P-052

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

Arkusz II

POZIOM ROZSZERZONY

Czas pracy 150 minut

ARKUSZ II

MAJ
ROK 2005

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 15 stron. Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora. Błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą możesz uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
9. Wypełnij tę część karty odpowiedzi, którą koduje zdający. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
10. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Zamaluj ■ pola odpowiadające cyfrom numeru PESEL. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ⊙ i zaznacz właściwe.

Za rozwiązanie
wszystkich zadań
można otrzymać
łącznie
50 punktów

Życzymy powodzenia!

Wypełnia zdający przed
rozpoczęciem pracy

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

PESEL ZDAJĄCEGO

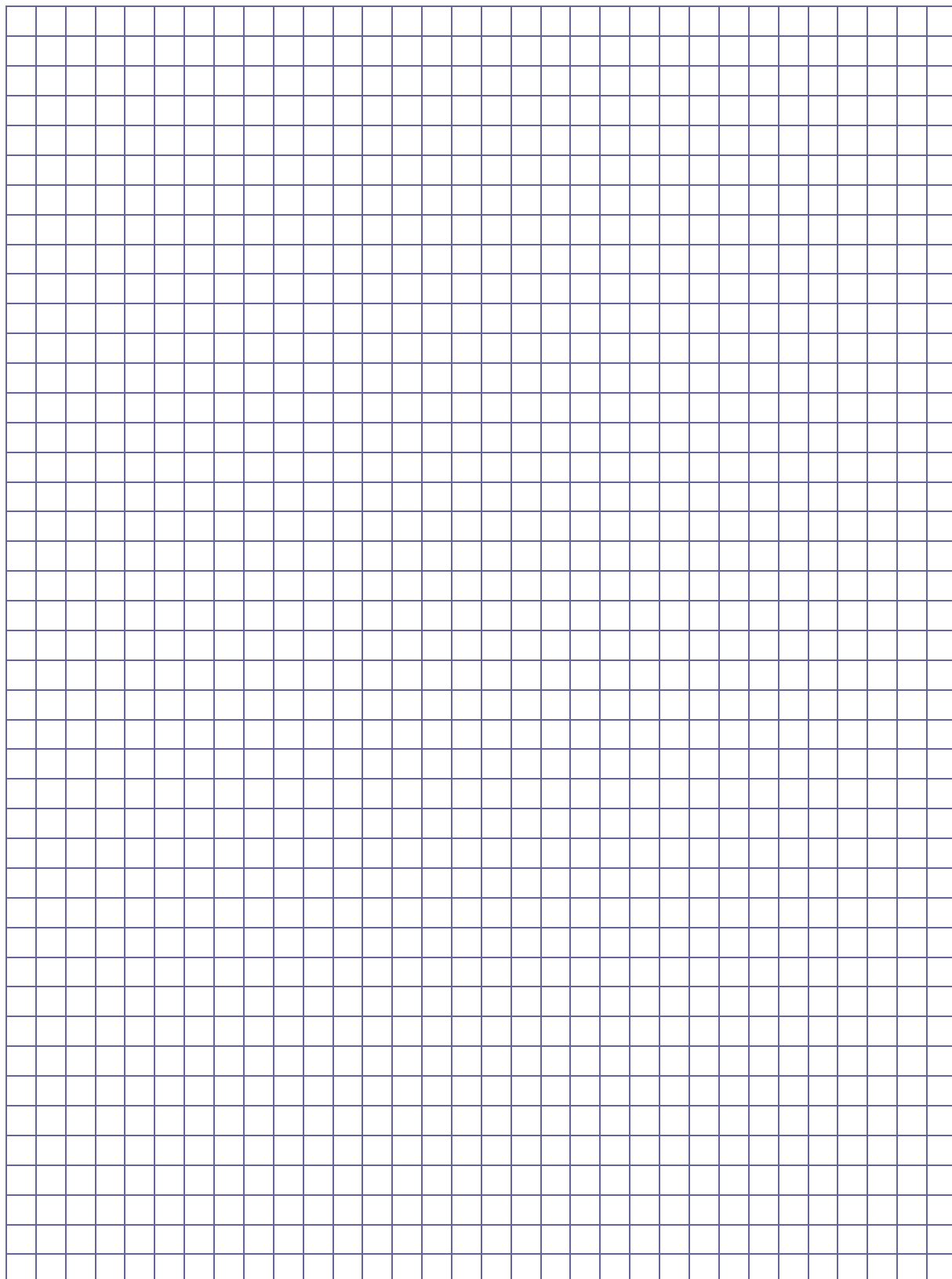
tylko
OKE Kraków,
OKE Wrocław

--	--	--

KOD
ZDAJĄCEGO

Zadanie 11. (3 pkt)

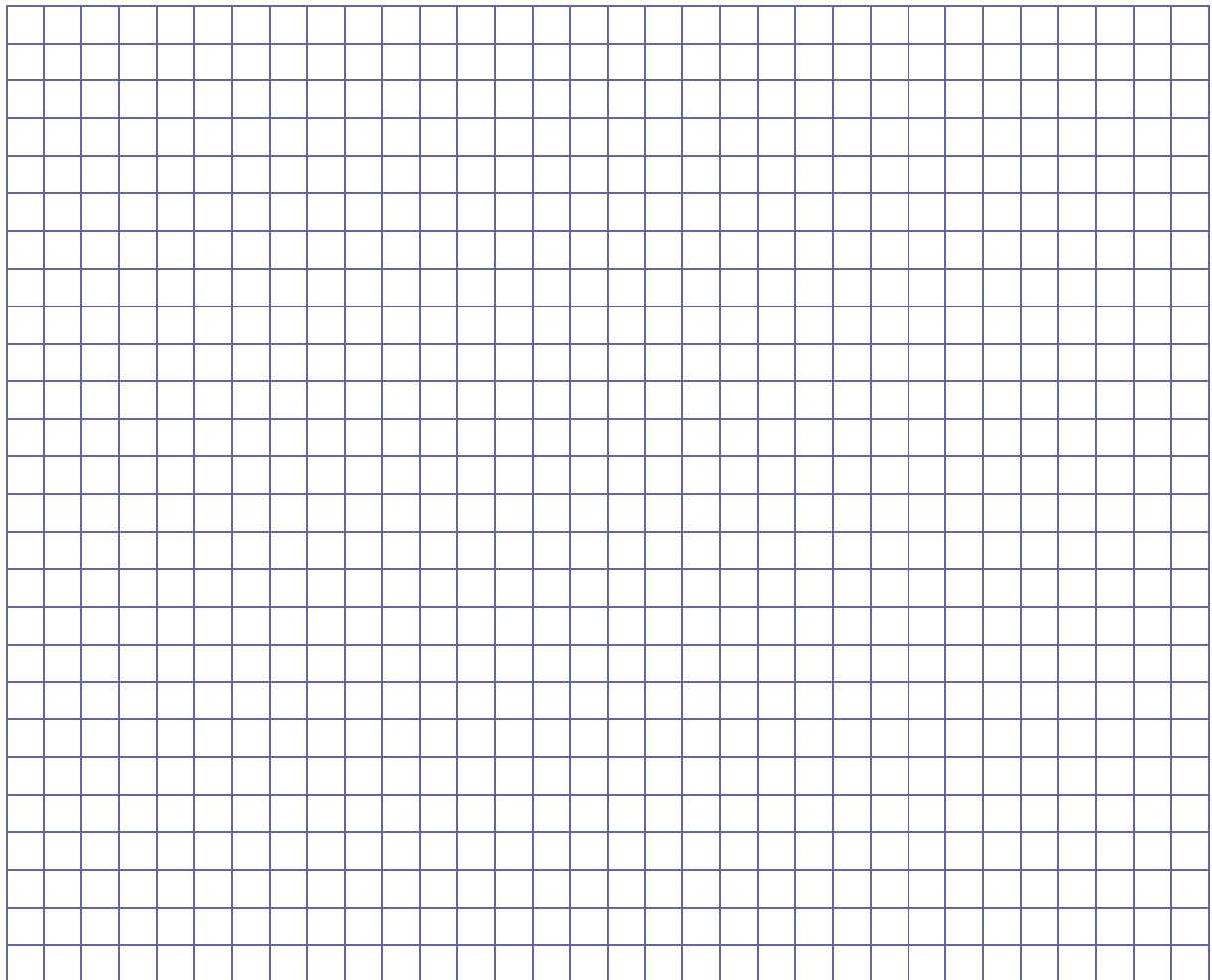
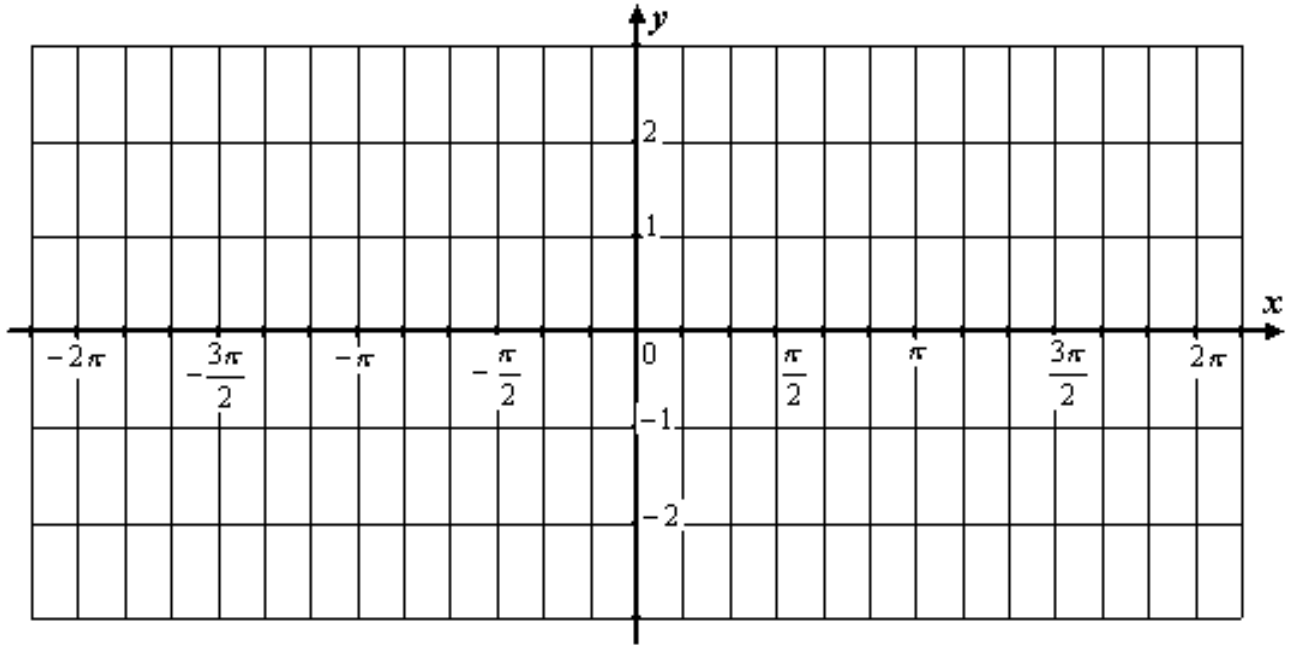
Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{x^2-3}(x^3 + 4x^2 - x - 4)$ i zapisz ją w postaci sumy przedziałów liczbowych.



Zadanie 12. (4 pkt)

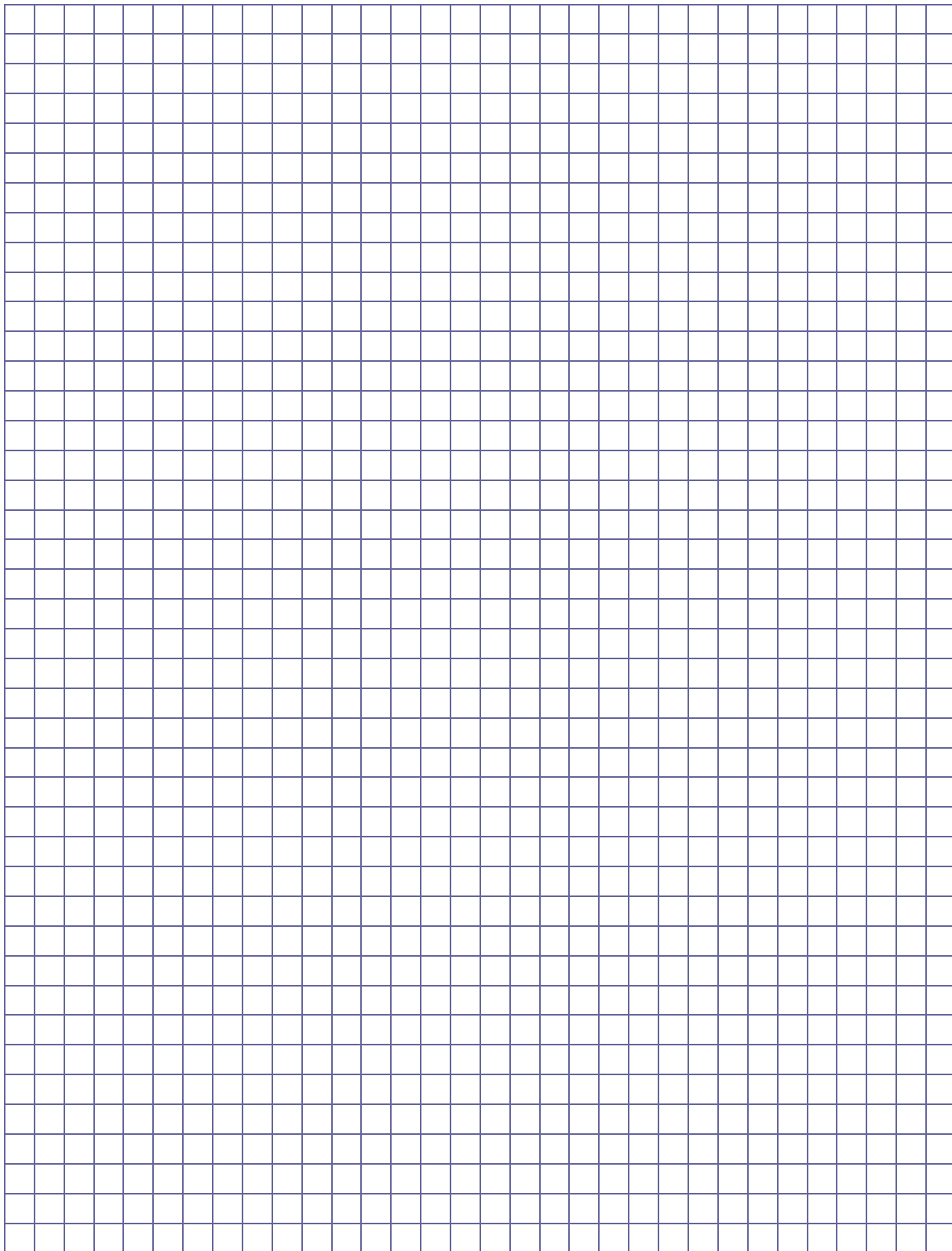
Dana jest funkcja: $f(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

- a) Naskicuj wykres funkcji f .
 b) Rozwiąż równanie: $f(x) = 1$.



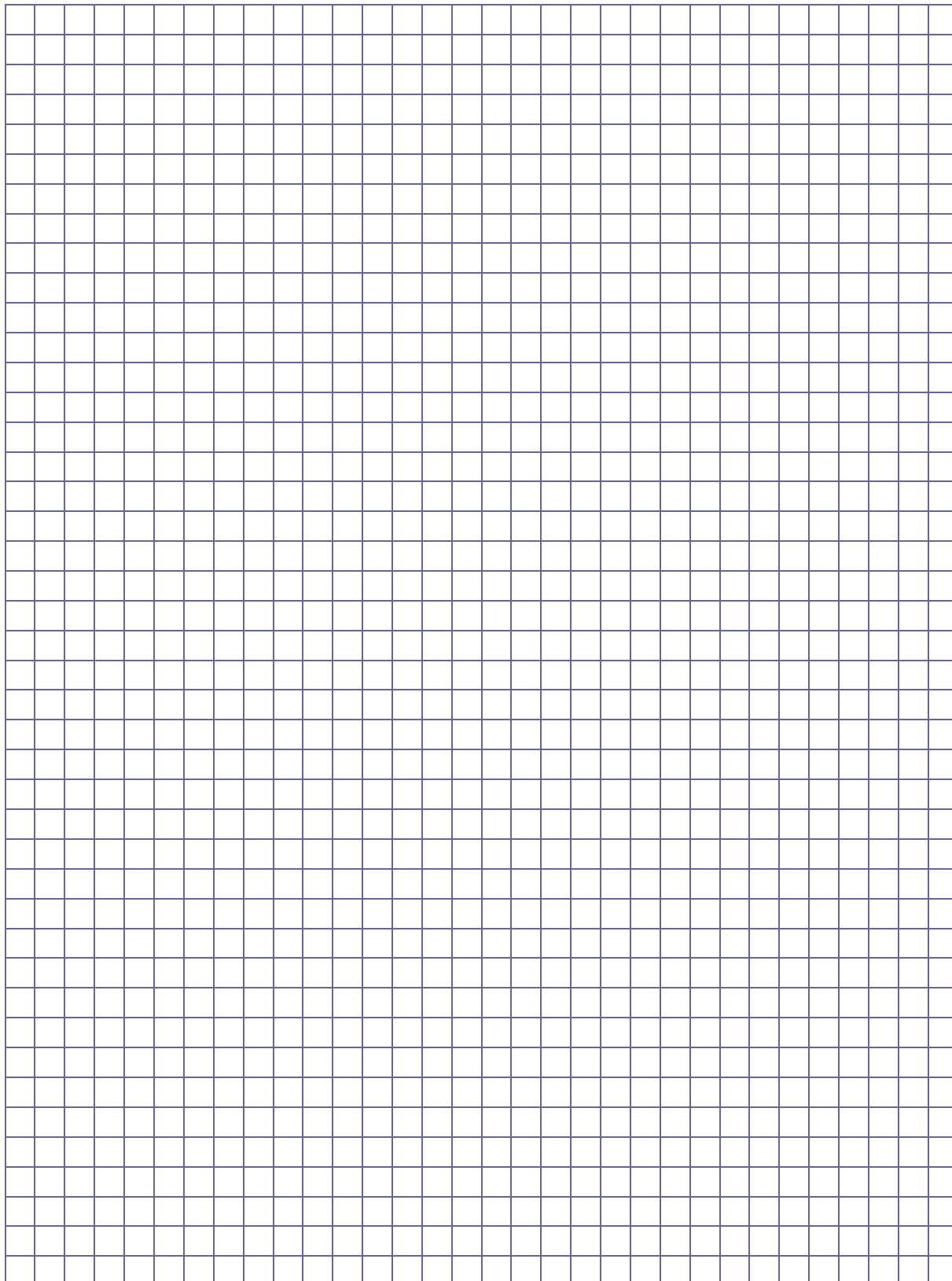
Zadanie 13. (4 pkt)

Rzucamy n razy dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz, dla jakich n prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz tej samej liczby oczek na obu kostkach jest mniejsze od $\frac{671}{1296}$.



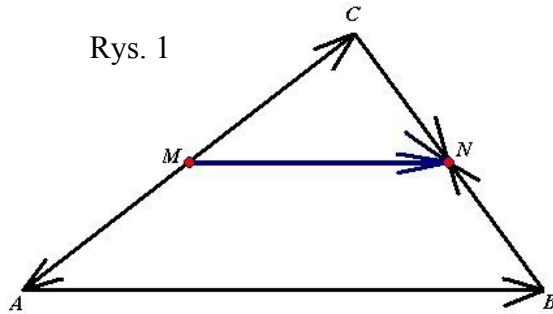
Zadanie 14. (5 pkt)

Oblicz: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2)}{5 + 7 + 9 + \dots + (2n + 3)}$.



Zadanie 15. (4 pkt)

W dowolnym trójkącie ABC punkty M i N są odpowiednio środkami boków AC i BC (Rys. 1).



Zapoznaj się uważnie z następującym rozumowaniem:

Korzystając z własności wektorów i działań na wektorach, zapisujemy równości:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \quad (1)$$

oraz

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} \quad (2)$$

Po dodaniu równości (1) i (2) stronami otrzymujemy:

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}$$

Ponieważ $\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA}$ oraz $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{BN}$, więc:

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BN}$$

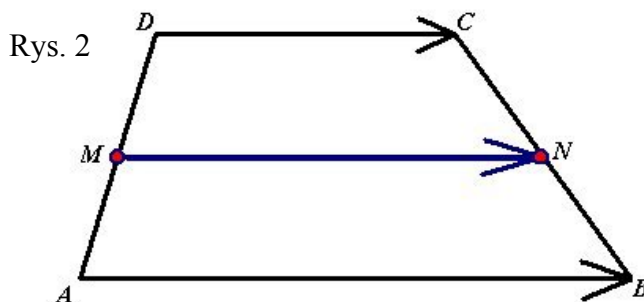
$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \vec{0} + \overrightarrow{AB} + \vec{0}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

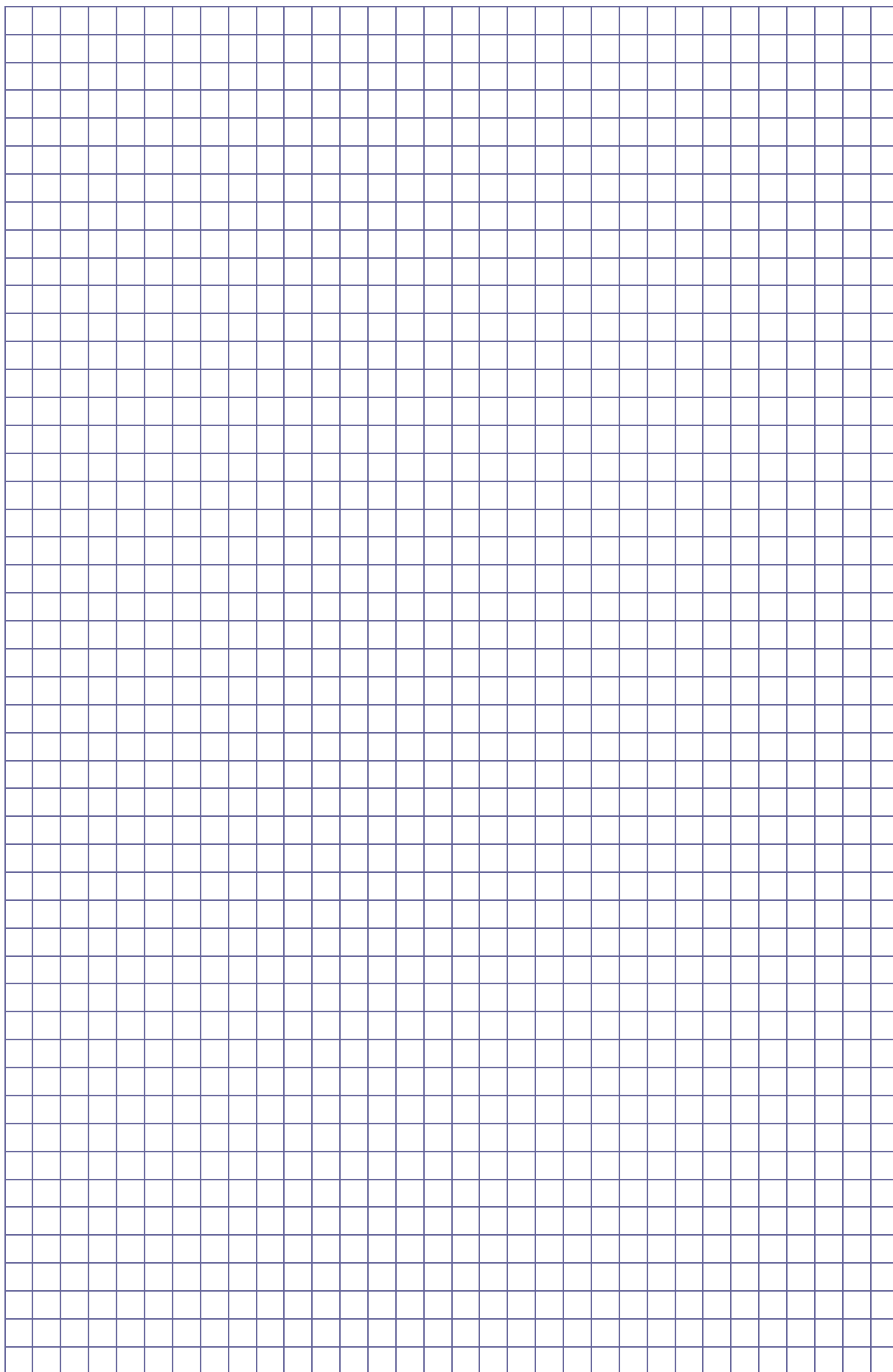
Wykorzystując własności iloczynu wektora przez liczbę, ostatnią równość można zinterpretować następująco:

odcinek łączący środki dwóch boków dowolnego trójkąta jest równoległy do trzeciego boku tego trójkąta, zaś jego długość jest równa połowie długości tego boku.

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie, ustal związek pomiędzy wektorem \overrightarrow{MN} oraz wektorami \overrightarrow{AB} i \overrightarrow{DC} , wiedząc, że czworokąt $ABCD$ jest dowolnym trapezem, zaś punkty M i N są odpowiednio środkami ramion AD i BC tego trapezu (Rys. 2).



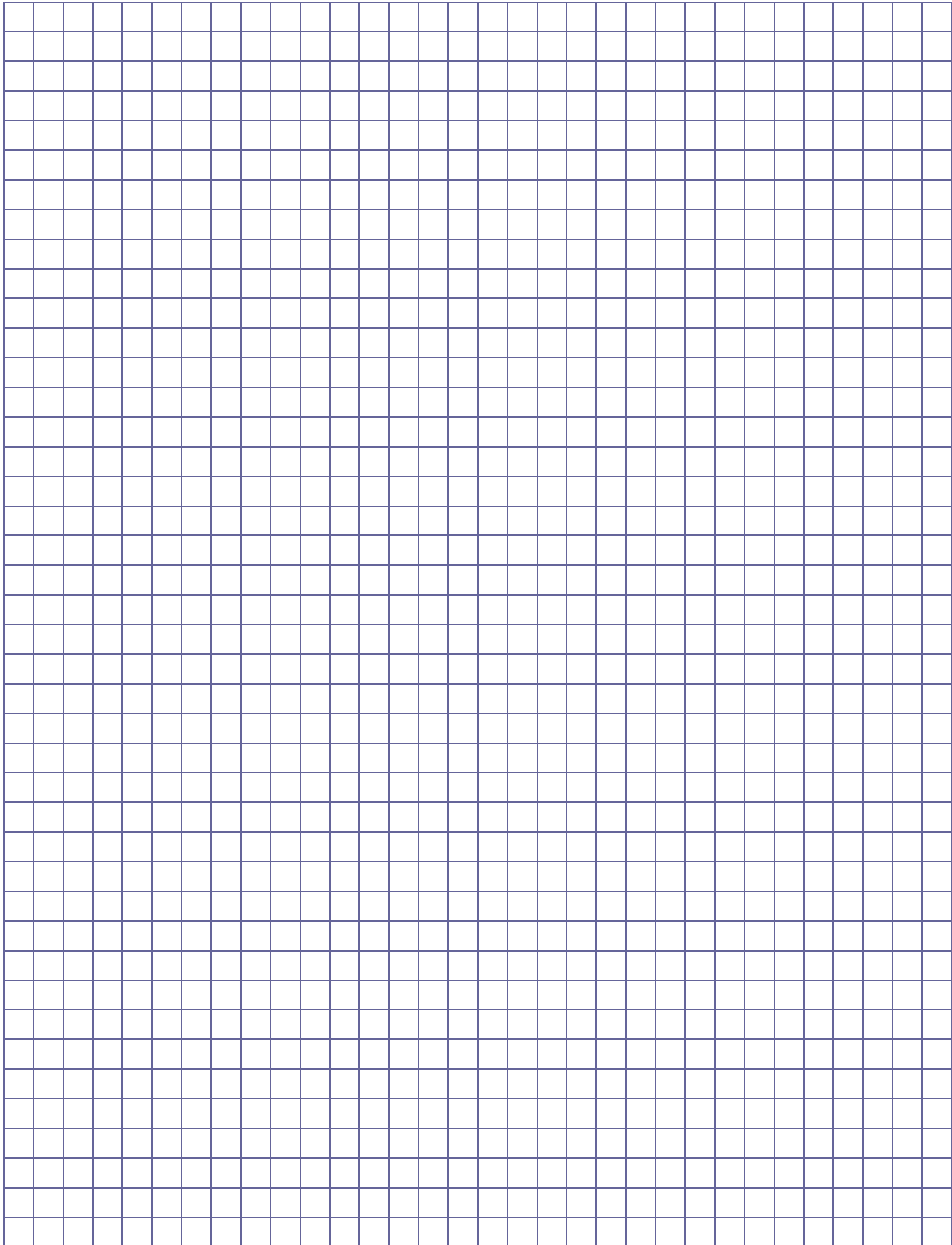
Podaj interpretację otrzymanego wyniku.



Zadanie 16. (5 pkt)

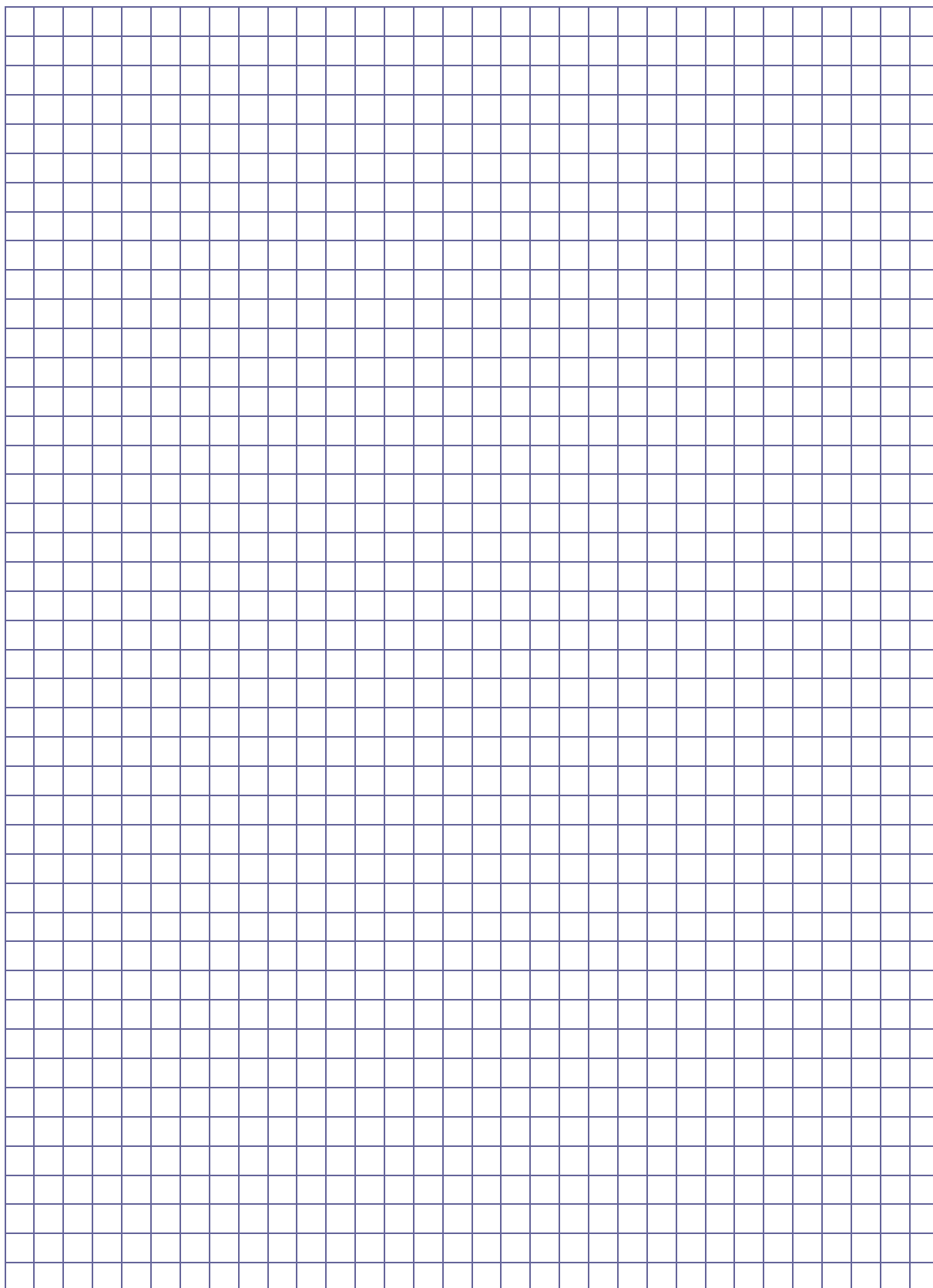
Sześcian o krawędzi długości a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem $\frac{\pi}{3}$. Sporządź odpowiedni rysunek.

Oblicz pole otrzymanego przekroju.



Zadanie 17. (7 pkt)

Wykaż, bez użycia kalkulatora i tablic, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$ jest liczbą całkowitą.



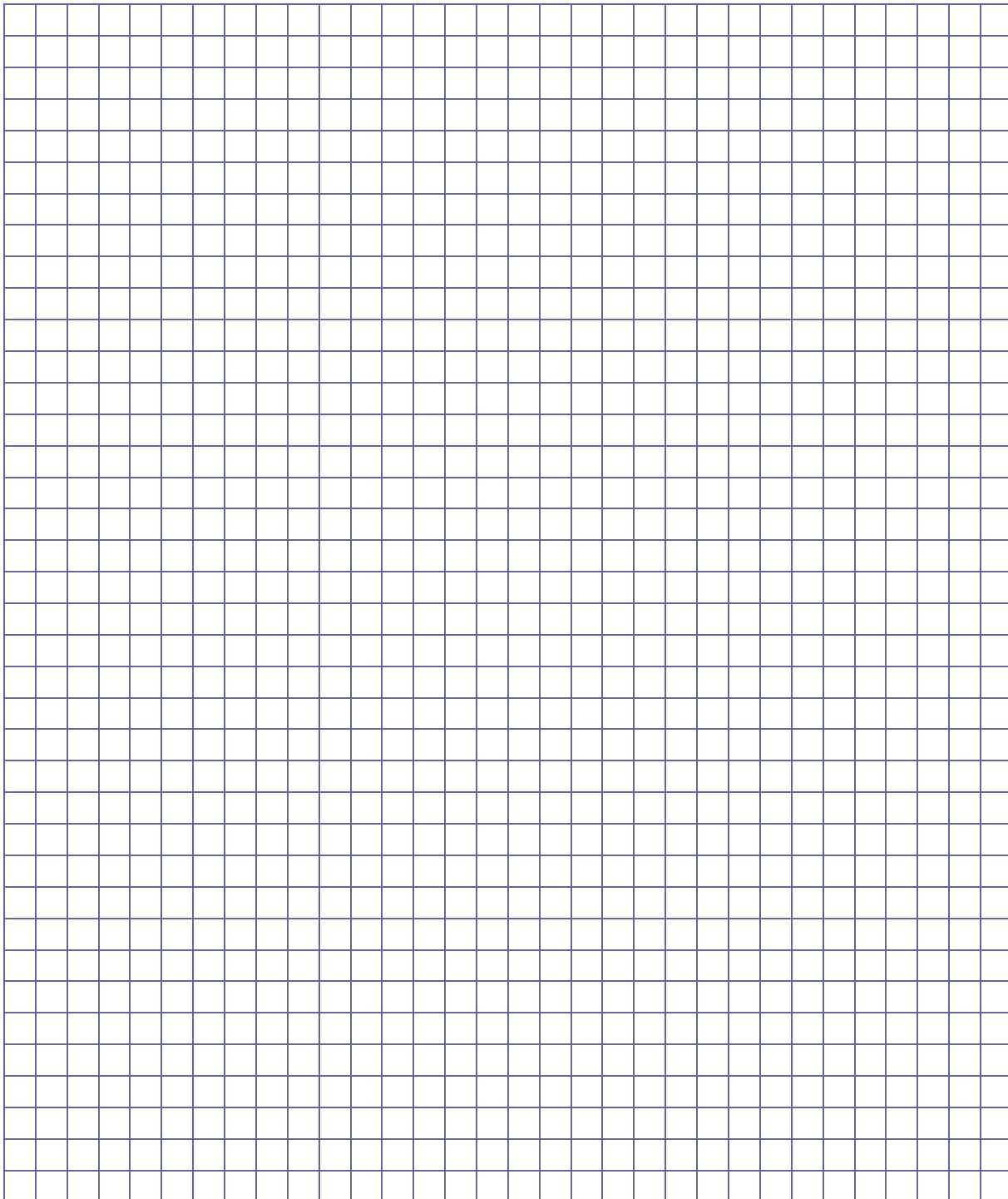
Zadanie 18. (8 pkt)

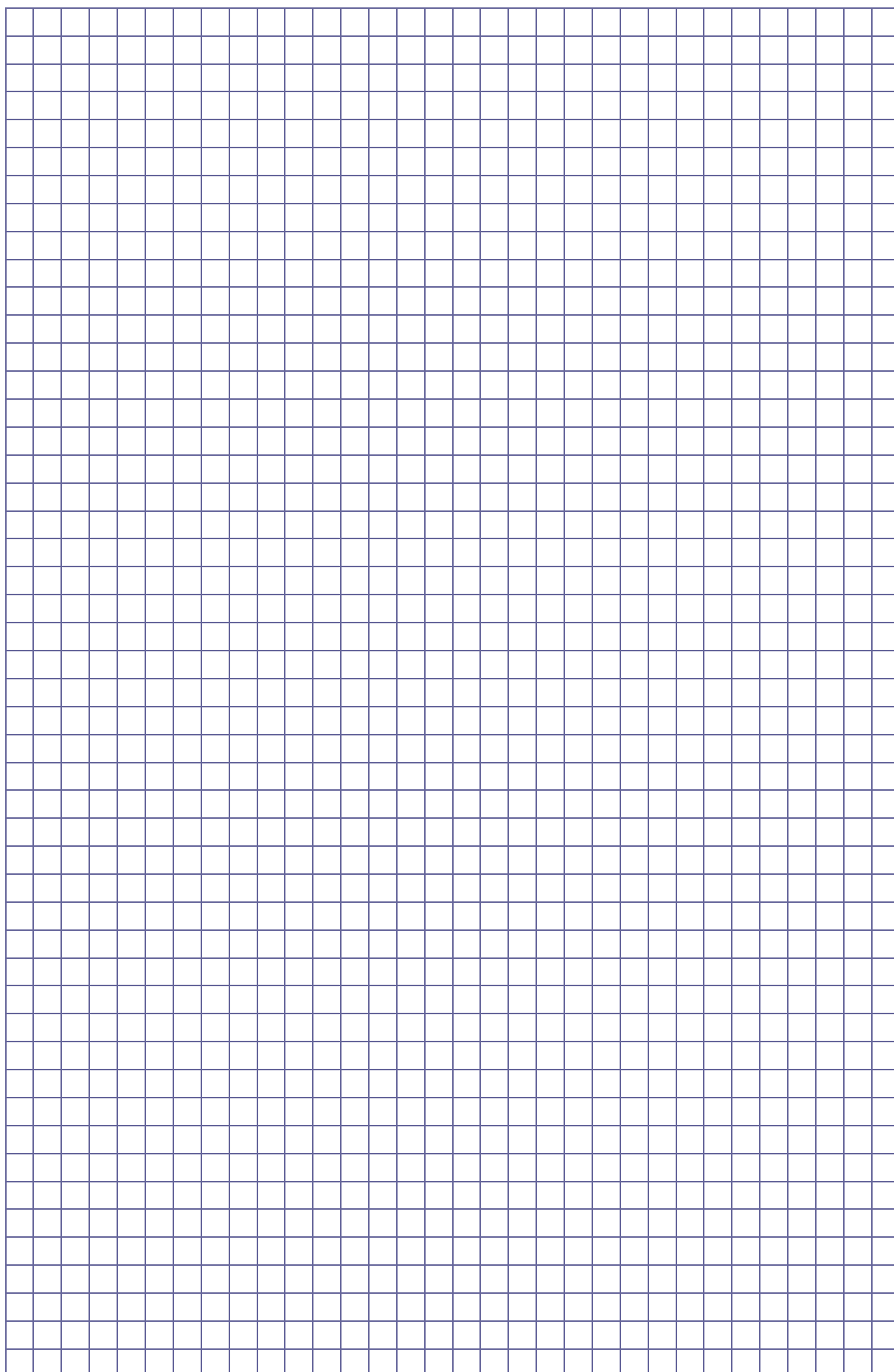
Pary liczb (x, y) spełniające układ równań:

$$\begin{cases} -4x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0 \\ -x^2 + y + 4 = 0 \end{cases}$$

są współrzędnymi wierzchołków czworokąta wypukłego $ABCD$.

- Wyznacz współrzędne punktów: A, B, C, D .
- Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym.
- Wyznacz równanie okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$.

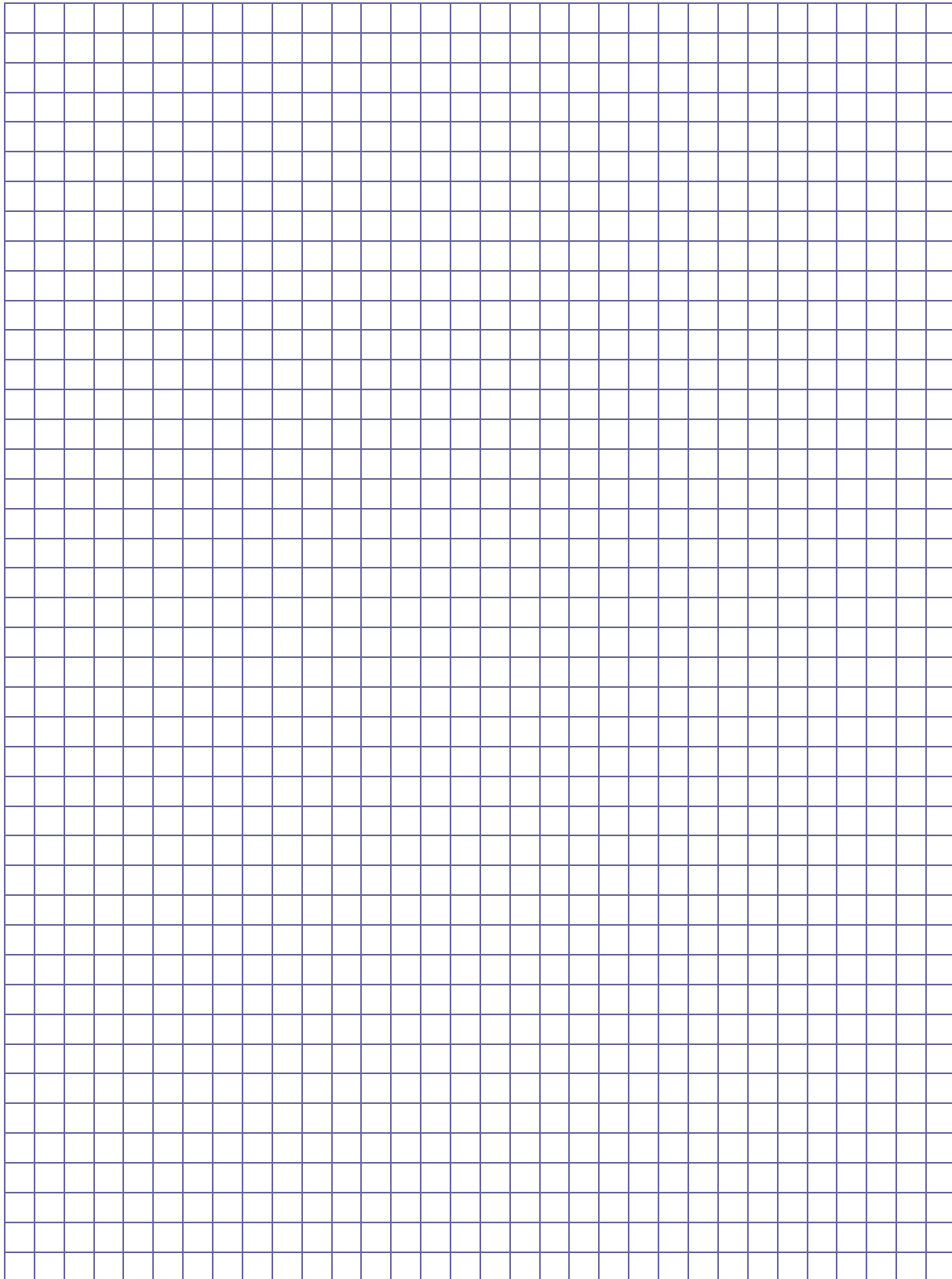


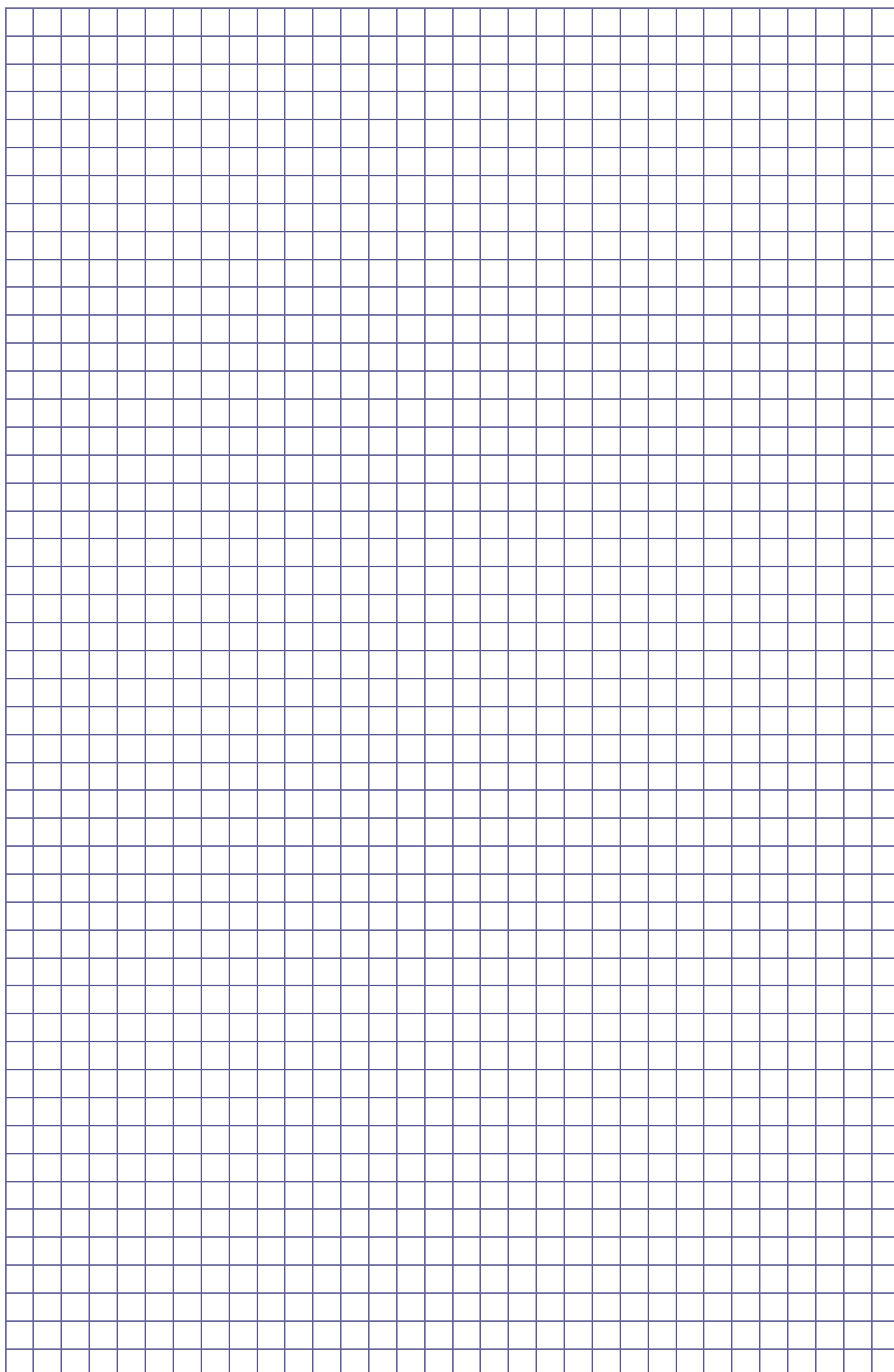


Zadanie 19. (10 pkt)

Dane jest równanie: $x^2 + (m - 5)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$.

Zbadaj, dla jakich wartości parametru m stosunek sumy pierwiastków rzeczywistych równania do ich iloczynu przyjmuje wartość najmniejszą. Wyznacz tę wartość.





BRUDNOPIS

