CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to **M-100**.
Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny *Formuła 2023*

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

TEST DIAGNOSTYCZNY

Symbol arkusza
MMAP-R0-100-2412

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

☐ dostosowania zasad oceniania.

DATA: **12 grudnia 2024 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

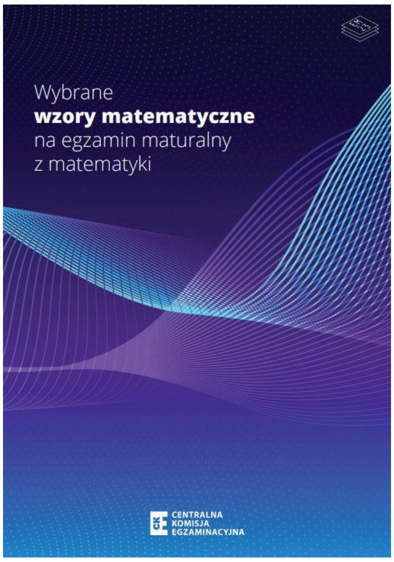
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 30 stron (zadania 1–13). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Nie wpisuj żadnych znaków w tabelkach przeznaczonych dla egzaminatora. Tabelki umieszczone są na marginesie przy każdym zadaniu.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



**Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.**

Zadanie 1. (0–2)

Ładunek elektryczny zgromadzony w kondensatorze można opisać zależnością

$$Q(t) = Q_0 \cdot \beta^{-t} \quad \text{dla} \quad t \geq 0$$

gdzie:

Q_0 – ładunek elektryczny zgromadzony w kondensatorze w chwili początkowej ($t = 0$) wyrażony w milikulombach

Q – ładunek elektryczny zgromadzony w kondensatorze w chwili t (licząc od chwili początkowej) wyrażony w milikulombach

β – stała dodatnia

t – czas wyrażony w sekundach.

Wiadomo, że w chwili $t = 4$ s w kondensatorze był zgromadzony ładunek 2 milikulombów, a w chwili $t = 6$ s – ładunek 18 milikulombów.

1.
0–1–2

Oblicz, ile milikulombów ładunku było zgromadzone w tym kondensatorze w chwili $t = 5$ s. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0–2)

Okrąg $\mathcal{O}$ jest styczny do boków AC i BC trójkąta ABC oraz przecina bok AB tego trójkąta w punktach M oraz N, przy czym $0 < |AM| < |AN| < |AB|$.

Wykaż, że jeśli $|AM| = |BN|$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

2.
0–1–2

Zadanie 3. (0–3)

Iloczyn długości średnicy podstawy walca i wysokości walca jest równy $12\sqrt{3}$.
Pole powierzchni całkowitej tego walca jest równe $12\pi\left(\sqrt{3}+1\right)$.

3.
0–1–2–3

Oblicz objętość tego walca. Zapisz obliczenia.

Zadanie 4. (0–3)

Wykaż, że

$$\frac{1}{\log_2 35+1}+\frac{1}{\log_7 140-\log_7 2}+\frac{1}{\log_5 7+\log_5 2+1}=1$$

4.
0–1–2–3

Zadanie 5. (0–3)

W pewnej lokalnej społeczności 35% osób ma wyższe wykształcenie. W tej społeczności językiem niemieckim dobrze włada 70% osób mających wyższe wykształcenie i 40% osób bez wyższego wykształcenia.
Spośród członków tej społeczności wybieramy losowo jedną osobę.

5.
0–1–2–3

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wybierzemy osobę z wyższym wykształceniem, jeżeli wiadomo, że ta osoba dobrze włada językiem niemieckim. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części setnych. Zapisz obliczenia.

Kolejne zadania egzaminacyjne są wydrukowane na następnych stronach.

6.
0–1–2–3-4

Zadanie 6. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$|4x-8|+|x-2|=|2-x|+|x+2|+4$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0–4)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są:
okrąg o równaniu $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 50$ i punkty $A = (6, 4)$ oraz $B = (-6, 8)$.
Punkt C leży na tym okręgu i $|AC| = |BC|$.

7.
0–1–2–3–4

Oblicz współrzędne punktu C. Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia.

8.
0–1–2–3–4

Zadanie 8. (0–4)

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+3+5+7+\ ...\ +(2n+1)}{\binom{n}{2}}$$

gdzie $1+3+5+7+\ ...\ +(2n+1)$ jest sumą kolejnych liczb naturalnych nieparzystych. Zapisz obliczenia.

9.
0–1–2–3–4

Zadanie 9. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$$

w zbiorze $[-\pi, 2\pi]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0–5)

Trzeci i piąty wyraz malejącego ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, spełniają warunek $a_3 + a_5 = 10$.

Trzywyrazowy ciąg $\left(2a_1 + 4, a_4 - 1, -\frac{1}{8}a_7\right)$ jest geometryczny.

10. 0–1–2–3–4–5

Oblicz wyrazy tego ciągu geometrycznego. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0–5)

Funkcja kwadratowa f zmiennej rzeczywistej x jest określona wzorem

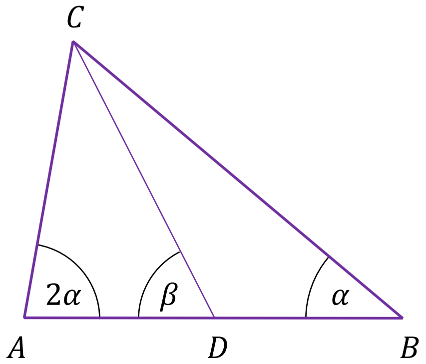
$$f(x) = x^2 - 3x - m^2 + m + 3$$

11. 0–1–2–3–4–5

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe x_1, x_2 spełniające warunek $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0–5)

W trójkącie ostrokątnym ABC miara kąta BAC jest dwa razy większa od miary kąta ABC. Punkt D jest środkiem boku AB. Niech α oznacza miarę kąta ABC, natomiast β – miarę kąta ADC (zobacz rysunek).



12.
0–1–2–3–4–5

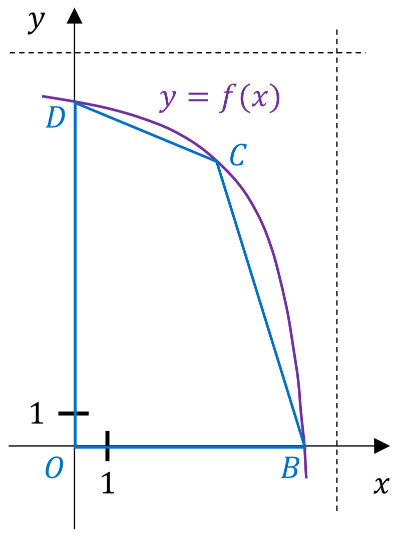
Oblicz $\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(2\alpha)}$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 13.

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\frac{12x-84}{x-8}$ dla każdego $x\in(-\infty,8)$.
W kartezjańskim układzie współrzędnych (x,y) rozważamy wszystkie czworokąty $OBCD$, w których:

- wierzchołek O ma współrzędne $(0,0)$
- wierzchołki B oraz D są punktami przecięcia wykresu funkcji f z osią – odpowiednio – Ox i Oy
- wierzchołek C ma obie współrzędne dodatnie i leży na wykresie funkcji f

(zobacz rysunek).



Zadanie 13.1. (0–2)

13.1. 0–1–2

Wykaż, że pole P czworokąta $OBCD$ w zależności od pierwszej współrzędnej x punktu C jest określone wzorem

$$\boldsymbol{P(x)=\frac{21}{4}\cdot\frac{x^2-56}{x-8}}$$

Zadanie 13.2. (0–4)

Pole P czworokąta $OBCD$ w zależności od pierwszej współrzędnej x punktu C jest określone wzorem

$$P(x) = \frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 56}{x - 8}$$

dla $x \in (0, 7)$.

Oblicz współrzędne wierzchołka C, dla których pole czworokąta $OBCD$ jest największe. Zapisz obliczenia.

13.2.
0–1–2–3–4

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023