

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	<b>Zasady oceniania rozwiązań zadań</b>
<i>Egzamin:</i>	<b>Egzamin maturalny</b>
<i>Przedmiot:</i>	<b>Matematyka</b>
<i>Poziom:</i>	<b>Poziom rozszerzony</b>
<i>Formy arkusza:</i>	MMAP-R0-100, MMAP-R0-200, MMAP-R0-300, MMAP-R0-400, MMAP-R0-600, MMAP-R0-700, MMAP-R0-K00, MMAP-R0-Q00, MMAU-R0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	11 czerwca 2024 r.

### Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej  $(n - 1)$  punktów (gdzie  $n$  jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

### Zadanie 1. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024 <sup>1</sup>	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.13) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

### Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 120 sekund.

1 pkt – wyznaczenie współczynnika  $b$ :  $b = \frac{1}{9}m_0$

ALBO

– zapisanie związku  $a + b = m_0$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Przykładowe pełne rozwiązanie

Ponieważ po osiągnięciu stanu równowagi masa związku A była równa  $\frac{1}{9}m_0$ , więc

$$\frac{1}{9}m_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} m(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} a \cdot 2^{-0,05 \cdot t} + b = 0 + b = b$$

Stąd i z warunku  $m(0) = m_0$  otrzymujemy

$$m_0 = a \cdot 2^{-0,05 \cdot 0} + \frac{1}{9}m_0$$

czyli  $a = \frac{8}{9}m_0$ .

Obliczamy czas, po którym pozostało 12,5% początkowej masy związku A:

<sup>1</sup>Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (Dz.U. poz. 1246).

$$\frac{1}{8}m_0 = \frac{8}{9}m_0 \cdot 2^{-0,05 \cdot t} + \frac{1}{9}m_0 \quad /: m_0$$

$$\frac{1}{72} = \frac{8}{9} \cdot 2^{-0,05 \cdot t}$$

$$2^{-6} = 2^{-0,05 \cdot t}$$

$$6 = 0,05t$$

$$t = 120$$

Zatem po 120 sekundach przereaguje 87,5% masy początkowej związku A.

**Zadanie 2. (0–2)**

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XIII.R1) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne).

**Zasady oceniania**

2 pkt – poprawna metoda obliczenia granicy oraz poprawny wynik:  $\left(-\frac{1}{6}\right)$ .

1 pkt – zapisanie wyrażenia  $\frac{|x-3|}{x^2-9}$  w postaci  $\frac{-1}{x+3}$ , gdzie  $x \in (-3, 3)$

ALBO

– zapisanie wyrażenia  $\left|\frac{|x-3|}{x^2-9} + \frac{1}{6}\right|$  w postaci  $\frac{1}{6} \cdot \left|\frac{x-3}{x+3}\right|$ , gdzie  $x \in (-3, 3)$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązania***Sposób I*

Przekształcamy wyrażenie  $\frac{|x-3|}{x^2-9}$ , korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów i definicji wartości bezwzględnej:

$$\frac{|x-3|}{x^2-9} = \frac{-(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{-1}{x+3}$$

dla każdego  $x \in (-3, 3)$ .

Ponieważ  $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x+3) = 6$  oraz  $\lim_{x \rightarrow 3^-} (-1) = -1$ , więc

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x^2-9} = -\frac{1}{6}$$

*Sposób II*

Niech  $\epsilon$  będzie dowolną liczbą dodatnią. Oznaczmy  $\delta = \frac{6\epsilon}{1+\epsilon}$ . Wtedy  $\delta > 0$  i  $\delta < 6$ .

Niech  $x$  będzie dowolną liczbą rzeczywistą spełniającą warunek  $-\delta < x-3 < 0$ .

Wówczas

$$\begin{aligned} \left|\frac{|x-3|}{x^2-9} + \frac{1}{6}\right| &= \left|\frac{-(x-3)}{(x-3)(x+3)} + \frac{1}{6}\right| = \left|\frac{-1}{x+3} + \frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6} \cdot \left|\frac{x-3}{x+3}\right| < \frac{1}{6} \cdot \frac{\delta}{|x+3|} < \\ &< \frac{1}{6} \cdot \frac{\delta}{6-\delta} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6\epsilon}{6-\frac{6\epsilon}{1+\epsilon}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6\epsilon}{6} < \epsilon \end{aligned}$$

Zatem dla każdego  $\epsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$  takie, że dla każdego  $x$  spełniającego warunek  $-\delta < x - 3 < 0$  zachodzi

$$\left| \frac{|x - 3|}{x^2 - 9} + \frac{1}{6} \right| < \epsilon$$

To oznacza, że

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x - 3|}{x^2 - 9} = -\frac{1}{6}$$

**Zadanie 3. (0–3)**

<b>Wymagania egzaminacyjne 2024</b>	
<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymagania szczegółowe</b>
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XIII.R2) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną pochodnej; XIII.R3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu.

**Zasady oceniania**

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $x_0 = 7$  oraz  $y = -x + 12$  (lub  $y = -(x - 7) + 5$ ).

2 pkt – obliczenie odciętej punktu  $P$  i wyznaczenie pochodnej funkcji  $f$ :  $x_0 = 7$  oraz

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x - 4) - (2x + 1) \cdot 1}{(x - 4)^2}.$$

1 pkt – obliczenie odciętej punktu  $P$ :  $x_0 = 7$   
 ALBO

– wyznaczenie pochodnej funkcji  $f$ :  $f'(x) = \frac{2 \cdot (x - 4) - (2x + 1) \cdot 1}{(x - 4)^2}.$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwaga:**

Jeżeli zdający błędnie stosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Obliczamy odcięta  $x_0$  punktu  $P$ :

$$5 = \frac{2x_0 + 1}{x_0 - 4}$$

$$5x_0 - 20 = 2x_0 + 1$$

$$x_0 = 7$$

Wyznaczamy pochodną funkcji  $f$ :

$$f'(x) = \frac{2(x - 4) - (2x + 1) \cdot 1}{(x - 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-9}{(x - 4)^2}$$

Wyznaczamy równanie kierunkowe  $y = ax + b$  stycznej do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $P$ . Obliczamy współczynnik kierunkowy  $a$  w równaniu stycznej:

$$a = f'(7) = -1$$

Obliczamy współczynnik  $b$  w równaniu stycznej:

$$5 = -1 \cdot 7 + b$$

$$b = 12$$

Styczna ma równanie  $y = -x + 12$ .

**Zadanie 4. (0–3)**

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.R1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe [...].

**Zasady oceniania**

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $\frac{1}{15}$ .

2 pkt – zapisanie liczby elementów zbioru  $A \cap B$  i wyznaczenie/zapisanie liczby elementów zbioru  $B$ :  $|A \cap B| = 8$  i  $|B| = \binom{10}{3}$

ALBO

– wyznaczenie/zapisanie prawdopodobieństwa zdarzeń  $A \cap B$  oraz  $B$ :

$$P(A \cap B) = \frac{8}{2^{10}} \text{ oraz } P(B) = \frac{\binom{10}{3}}{2^{10}}.$$

1 pkt – zapisanie liczby elementów zbioru  $A \cap B$ : 8

ALBO

– wyznaczenie/zapisanie liczby elementów zbioru  $B$ , np.  $\binom{10}{3}$ ,

ALBO

– wyznaczenie/zapisanie prawdopodobieństwa zdarzenia  $B$ , np.  $P(B) = \frac{\binom{10}{3}}{2^{10}}$ ,

ALBO

– wyznaczenie/zapisanie prawdopodobieństwa zdarzenia  $A \cap B$ , np.  $P(A \cap B) = \frac{8}{2^{10}}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$A$  – zdarzenie polegające na wyrzuceniu trzech orłów z rzędu w dziesięciu rzutach monetą,

$B$  – zdarzenie polegające na wyrzuceniu trzech orłów w dziesięciu rzutach monetą,

$\Omega$  – zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych.

Wynikiem każdego rzutu jest orzeł ( $o$ ) lub reszka ( $r$ ). Wynikiem doświadczenia losowego jest dziesięciowyrazowy ciąg o wyrazach ze zbioru  $\{o, r\}$ . Zatem liczba elementów zbioru  $\Omega$  jest równa  $2^{10} = 1024$ .

Obliczamy liczbę elementów zbioru  $B$ :  $|B| = \binom{10}{3} = 120$ .

Zdarzenie  $A \cap B$  polega na wyrzuceniu w dziesięciu rzutach dokładnie trzech orłów i to trzech orłów z rzędu. Obliczamy liczbę elementów zbioru  $A \cap B$ :  $|A \cap B| = 8$ .

Obliczamy prawdopodobieństwo  $P(A|B)$ :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{\frac{8}{1024}}{\frac{120}{1024}} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

**Uwagi:**

1. Zdający może rozwiązać zadanie poprzez obliczenie prawdopodobieństw zdarzeń  $B$  oraz  $A \cap B$ .
2. Zdający może obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia  $B$ , korzystając ze schematu Bernoullego. Sukcesem w pojedynczej próbie jest wyrzucenie orła. Prawdopodobieństwo  $p$  sukcesu jest równe  $p = \frac{1}{2}$ . Przy liczbie prób  $n = 10$  oraz liczbie sukcesów  $k = 3$  otrzymujemy

$$P(B) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^7 = \frac{120}{2^{10}}$$

**Zadanie 5. (0–3)**

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: III.R2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne [...].

**Zasady oceniania**

3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – wykorzystanie założenia i przekształcenie nierówności  $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$  do postaci  $4a^2 - 4a + 1 \geq 0$ ,  $4b^2 - 4b + 1 \geq 0$  albo  $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$   
ALBO

– zapisanie nierówności między odpowiednimi średnimi liczb  $\frac{1}{2a+b}$  oraz  $\frac{1}{a+2b}$  (lub między odpowiednimi średnimi liczb  $2a+b$  oraz  $a+2b$ ) i przekształcenie tej nierówności do postaci, z której można bezpośrednio wnioskować o prawdziwości tezy, np.  $\frac{3}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b}}$ .

1 pkt – zapisanie nierówności w postaci równoważnej jako nierówności wymiernej

$$\frac{P(a,b)}{Q(a,b)} \geq 0, \text{ np. } \frac{3(a+2b)+3(2a+b)-4(a+2b)(2a+b)}{3(2a+b)(a+2b)} \geq 0$$

ALBO

– zapisanie nierówności w postaci równoważnej jako nierówności wielomianowej, np.  $3(1+b) + 3(a+1) \geq 4(a+1)(1+b)$ ,  
ALBO

– zapisanie nierówności między średnią harmoniczną a arytmetyczną liczb  $\frac{1}{2a+b}$  oraz  $\frac{1}{a+2b}$  (lub między odpowiednimi średnimi liczb  $2a+b$  oraz  $a+2b$ ), np.  $\frac{\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b}}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b}}$ ,  $\frac{2a+b+a+2b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b}}$ ,

ALBO

– wykorzystanie założenia i zapisanie nierówności w postaci równoważnej jako nierówności wymiernej z jedną niewiadomą, np.  $\frac{1}{2a+(1-a)} + \frac{1}{a+2(1-a)} \geq \frac{4}{3}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązania***Sposób I*

Ponieważ  $a > 0$  i  $b > 0$ , więc  $(2a+b)(a+2b) > 0$ .

Przekształcamy równoważnie nierówność  $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$  i otrzymujemy:

$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$$

$$\frac{3(a+2b)}{3(2a+b)(a+2b)} + \frac{3(2a+b)}{3(a+2b)(2a+b)} - \frac{4(a+2b)(2a+b)}{3(a+2b)(2a+b)} \geq 0$$

$$\frac{3a+6b+6a+3b-8a^2-20ab-8b^2}{3(2a+b)(a+2b)} \geq 0$$

$$\frac{9a+9b-8a^2-20ab-8b^2}{3(2a+b)(a+2b)} \geq 0$$

$$9a+9b-8a^2-20ab-8b^2 \geq 0$$

Korzystamy z założenia i otrzymujemy dalej

$$9a+9(1-a)-8a^2-20a(1-a)-8(1-a)^2 \geq 0$$

$$4a^2-4a+1 \geq 0$$

$$(2a-1)^2 \geq 0$$

Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, więc nierówność  $(2a-1)^2 \geq 0$  jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej  $a$ . To oznacza, że nierówność

$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$  jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej  $a$  i dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej  $b$  takich, że  $a+b=1$ .

### Sposób II

Korzystamy z założenia  $a+b=1$  i nierówność  $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$  zapisujemy w postaci

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{4}{3}$$

Mnożymy obie strony tej nierówności przez liczbę dodatnią  $3(a+1)(1+b)$  i ponownie korzystamy z założenia, otrzymując kolejno:

$$3(1+b) + 3(a+1) \geq 4(a+1)(1+b)$$

$$2 - (a+b) \geq 4ab$$

$$1 \geq 4ab$$

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

Ponieważ kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, więc nierówność  $(a-b)^2 \geq 0$  jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej  $a$  i każdej liczby rzeczywistej  $b$ . To oznacza, że nierówność  $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$  jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej  $a$  i dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej  $b$  takich, że  $a+b=1$ .

**Sposób III**

Korzystamy z nierówności między średnią arytmetyczną a harmoniczną dla liczb dodatnich

$\frac{1}{2a+b}$  oraz  $\frac{1}{a+2b}$  i otrzymujemy:

$$\frac{\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b}}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{2a+b}} + \frac{1}{\frac{1}{a+2b}}}$$

$$\frac{\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b}}{2} \geq \frac{2}{2a+b+a+2b}$$

$$\frac{\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b}}{2} \geq \frac{2}{3(a+b)}$$

$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3(a+b)}$$

Po skorzystaniu z założenia  $a+b=1$  otrzymujemy tezę.

**Sposób IV**

Korzystamy z założenia  $a+b=1$  i nierówność  $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$  zapisujemy w postaci

$$\frac{1}{2a+1-a} + \frac{1}{a+2(1-a)} \geq \frac{4}{3}$$

Mnożymy obie strony tej nierówności przez liczbę dodatnią  $3(a+1)(2-a)$  i otrzymujemy kolejno:

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{2-a} \geq \frac{4}{3}$$

$$3(2-a) + 3(a+1) \geq 4(a+1)(2-a)$$

$$6 - 3a + 3a + 3 \geq -4a^2 + 4a + 8$$

$$4a^2 - 4a + 1 \geq 0$$

$$(2a-1)^2 \geq 0$$

Ponieważ kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, więc nierówność  $(2a-1)^2 \geq 0$  jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej  $a$ , więc w szczególności dla każdego  $a \in (0,1)$ . To oznacza, że nierówność  $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$  jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej  $a$  i dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej  $b$  takich, że  $a+b=1$ .

**Zadanie 6. (0–3)**

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.R1) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

**Zasady oceniania**

3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – wyznaczenie pola trapezu w zależności od długości jego podstaw:  $P = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}$ .

1 pkt – zastosowanie twierdzenia Pitagorasa i zapisanie równania z  $a$ ,  $b$  oraz  $h$ , z którego można wyznaczyć długość wysokości trapezu w zależności od długości jego

podstaw, np.  $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

ALBO

– wyznaczenie długości promienia okręgu w zależności od długości podstaw trapezu,

np.  $r = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}}$ ,

ALBO

– zapisanie, że pole czworokąta wpisanego w okrąg i opisanego na okręgu jest równe pierwiastkowi z iloczynu długości boków tego czworokąta,

ALBO

– zapisanie, że wysokość trapezu równoramiennego jest średnią geometryczną długości podstaw trapezu.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwaga:**

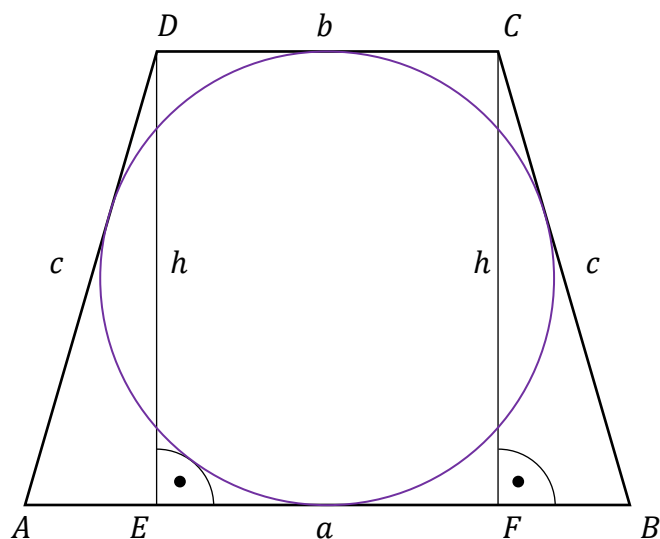
W przypadku, gdy zdający zapisze nierówność  $\frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > ab$  w postaci równoważnej

$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$  i stwierdzi, że jej prawdziwość wynika z nierówności między średnią

arytmetyczną i geometryczną różnych liczb dodatnich  $a$  i  $b$ , to rozumowanie uznajemy za pełne.

**Przykładowe pełne rozwiązania***Sposób I*

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trapez jest równoramienny, więc  $|AE| = |BF| = \frac{a-b}{2}$ . Ponieważ trapez jest opisany na okręgu, więc  $a + b = c + c$ , czyli  $c = \frac{a+b}{2}$ .

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $BCF$  otrzymujemy

$$|BF|^2 + |FC|^2 = |CB|^2$$

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2 = c^2$$

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad / \cdot 4$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 4h^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$h = \sqrt{ab}$$

Pole  $P$  trapezu jest równe  $P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}$ .

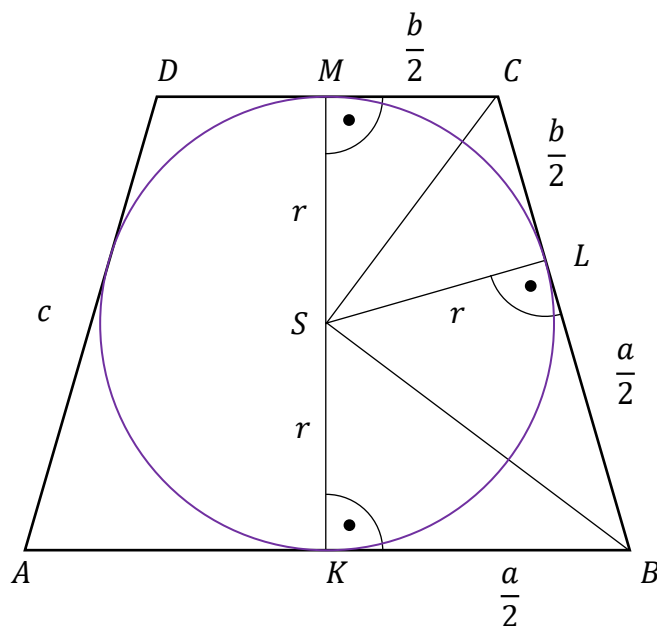
Ponieważ  $a > b$ , więc z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną liczb dodatnich  $a$  oraz  $b$  otrzymujemy  $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ . Stąd

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab}$$

czyli  $P > ab$ , co należało wykazać.

## Sposób II

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku ( $K, L, M$  są punktami styczności okręgu z trapezem).



Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że  $|BL| = \frac{a}{2}$  oraz  $|CL| = \frac{b}{2}$ .

Ponieważ środek okręgu wpisanego w trapez  $ABCD$  jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych tego trapezu, więc

$$|\sphericalangle KBS| = |\sphericalangle CBS| \quad \text{oraz} \quad |\sphericalangle MCS| = |\sphericalangle BCS|$$

Suma miar kątów wewnętrznych trapezu przy ramieniu  $BC$  jest równa  $180^\circ$ , więc

$$|\sphericalangle KBS| + |\sphericalangle CBS| + |\sphericalangle MCS| + |\sphericalangle BCS| = 180^\circ$$

Zatem

$$|\sphericalangle CBS| + |\sphericalangle BCS| = 90^\circ$$

To oznacza, że trójkąt  $BCS$  jest prostokątny.

Wysokość tego trójkąta opuszczona na przeciwprostokątną jest promieniem okręgu wpisanego w trapez  $ABCD$ , więc z twierdzenia o wysokości trójkąta prostokątnego wynika,

$$\text{że } r = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{ab}.$$

$$\text{Pole } P \text{ trapezu jest równe } P = \frac{a+b}{2} \cdot 2r = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}.$$

Pozostaje wykazać, że prawdziwa jest nierówność  $\frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > ab$ .

Dzieląc obie strony tej nierówności przez  $\sqrt{ab}$ , otrzymujemy

$$\frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > ab \quad /: \sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b > 0$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$$

Z założenia  $a > b > 0$ , więc  $\sqrt{a} - \sqrt{b} > 0$ . Zatem  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$  jako kwadrat liczby dodatniej  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ . To oznacza, że  $P > ab$ .

### Sposób III

Z własności czworokąta opisanego na okręgu i w który można także wpisać okrąg wynika, że pole takiego czworokąta jest równe  $\sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}$ , gdzie  $a, b, c, d$  są długościami boków czworokąta.

Trapez  $ABCD$  jest opisany na okręgu, ale jest on równoramienny, więc można na nim także opisać okrąg. Zatem pole  $P$  tego trapezu jest równe  $P = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot c} = \sqrt{ab} \cdot c$ , gdzie  $c$  jest długością ramienia trapezu.

Ponieważ trapez jest opisany na okręgu, więc  $a + b = c + c$ , czyli  $c = \frac{a+b}{2}$ .

$$\text{Stąd } P = \sqrt{ab} \cdot \frac{a+b}{2}.$$

Ponieważ  $a > b$ , więc z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną liczb dodatnich  $a$  oraz  $b$  otrzymujemy  $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ . Stąd

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab}$$

czyli  $P > ab$ , co należało wykazać.

**Zadanie 7. (0–4)**

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.R2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

**Zasady oceniania**

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $a_n = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ,

$$a_n = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

3 pkt – odrzucenie wartości  $q = 2$  **oraz** poprawne zastosowanie wzoru na sumę szeregu geometrycznego i zapisanie równania z jedną niewiadomą  $a_1 : \frac{a_1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 16$  (dla

sposobu I)

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą  $q$  oraz obliczenie pierwiastków tego równania, np.

$$16(1 - q^2) + 16(1 - q^2) \cdot q^2 = \frac{5}{2} \cdot 16(1 - q^2) \cdot q$$

$$\text{i } q = 1 \text{ oraz } q = -1, \text{ oraz } q = \frac{1}{2}, \text{ oraz } q = 2,$$

**oraz** odrzucenie tych wartości  $q$ , dla których nie jest spełniony warunek zbieżności  $|q^2| < 1$  (dla sposobu II).

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą  $q$  **oraz** obliczenie pierwiastków tego równania, np.  $2q^2 - 5q + 2 = 0$  i  $q = \frac{1}{2}$  oraz  $q = 2$  (dla sposobu I)

ALBO

– zapisanie równań  $a_1 + a_1 \cdot q^2 = \frac{5}{2} a_1 \cdot q$  oraz  $\frac{a_1}{1 - q^2} = 16$  (dla sposobu II).

1 pkt – zapisanie równania  $a_1 + a_1 \cdot q^2 = \frac{5}{2} a_1 \cdot q$  (dla sposobu I)

ALBO

– poprawne zastosowanie wzoru na sumę szeregu geometrycznego i zapisanie równania  $\frac{a_1}{1 - q^2} = 16$  (dla sposobu II).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

1. Jeżeli zdający zapisze sumę wszystkich wyrazów ciągu o wyrazach nieparzystych jako

$$\frac{a_1}{1 - q} \text{ i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to otrzymuje } \mathbf{3 \text{ punkty}}$$

za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający myli ciąg geometryczny z arytmetycznym, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

### Przykładowe pełne rozwiązania

#### Sposób I

Niech  $q$  oznacza iloraz ciągu geometrycznego  $(a_n)$ . Z warunku  $a_1 + a_3 = \frac{5}{2}a_2$  oraz z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$a_1 + a_1 \cdot q^2 = \frac{5}{2} \cdot a_1 \cdot q$$

$$a_1 \cdot \left(1 + q^2 - \frac{5}{2}q\right) = 0$$

$$a_1 = 0 \quad \vee \quad q^2 - \frac{5}{2}q + 1 = 0$$

$$a_1 = 0 \quad \vee \quad q = 2 \quad \vee \quad q = \frac{1}{2}$$

Rozważmy nieskończony ciąg wyrazów o numerach nieparzystych, tj.  $a_1, a_3, a_5, \dots$ . Jest to ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym  $a_1$  oraz ilorazie  $q^2$ . Ponieważ suma wszystkich wyrazów ciągu  $(a_n)$  o numerach nieparzystych istnieje i jest równa 16, więc  $a_1 \neq 0$  oraz  $|q^2| < 1$  i  $\frac{a_1}{1-q^2} = 16$ . Pozostaje zatem rozpatrzyć przypadki  $q = 2$  oraz  $q = \frac{1}{2}$ .

Gdy  $q = 2$ , to warunek  $|q^2| < 1$  nie jest spełniony.

Gdy  $q = \frac{1}{2}$ , to warunek  $|q^2| < 1$  jest spełniony. Wtedy  $\frac{a_1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 16$  i stąd  $a_1 = 12$ .

Nieskończony ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 12 i ilorazie  $\frac{1}{2}$  spełnia warunki zadania. Wzór ogólny na  $n$ -ty wyraz ciągu  $(a_n)$  ma postać  $a_n = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ .

#### Sposób II

Niech  $q$  oznacza iloraz ciągu geometrycznego  $(a_n)$ .

Rozważmy nieskończony ciąg wyrazów o numerach nieparzystych, tj.  $a_1, a_3, a_5, \dots$ . Jest to ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym  $a_1$  oraz ilorazie  $q^2$ . Ponieważ suma wszystkich wyrazów ciągu  $(a_n)$  o numerach nieparzystych istnieje i jest równa 16, więc  $a_1 \neq 0$  oraz  $|q^2| < 1$  i  $\frac{a_1}{1-q^2} = 16$ . Zatem  $a_1 = 16(1 - q^2)$ .

Z warunku  $a_1 + a_3 = \frac{5}{2}a_2$  oraz z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$a_1 + a_1 \cdot q^2 = \frac{5}{2} \cdot a_1 \cdot q$$

Stąd oraz z równości  $a_1 = 16(1 - q^2)$  otrzymujemy kolejno:

$$16(1 - q^2) + 16(1 - q^2) \cdot q^2 = \frac{5}{2} \cdot 16(1 - q^2) \cdot q$$

$$16 - 16q^2 + 16q^2 - 16q^4 = 40q - 40q^3$$

$$-16q^4 + 40q^3 - 40q + 16 = 0$$

$$-16(q^4 - 1) + 40q(q^2 - 1) = 0$$

$$-16(q^2 - 1)(q^2 + 1) + 40q(q^2 - 1) = 0$$

$$(q^2 - 1)[-16(q^2 + 1) + 40q] = 0$$

$$(q^2 - 1)(-16q^2 + 40q - 16) = 0$$

$$q^2 - 1 = 0 \quad \vee \quad -16q^2 + 40q - 16 = 0$$

$$q = 1 \quad \vee \quad q = -1 \quad \vee \quad q = 2 \quad \vee \quad q = \frac{1}{2}$$

Uwzględniając warunek  $|q^2| < 1$ , otrzymujemy  $q = \frac{1}{2}$ . Zatem  $a_1 = 12$ . Nieskończony ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 12 i ilorazie  $\frac{1}{2}$  spełnia warunki zadania. Wzór ogólny na  $n$ -ty wyraz ciągu  $(a_n)$  ma postać  $a_n = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ .

**Zadanie 8. (0–4)**

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R8) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (m.in. z wykorzystaniem twierdzenia sinusów).

**Zasady oceniania**

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $\sqrt{21} - 3$  (lub  $\sqrt{30 - 6\sqrt{21}}$ ).

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (długością boku  $AC$ ), np.

$$(4\sqrt{3})^2 = |AC|^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot |AC| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$|AC|^2 = (4\sqrt{3})^2 + 6^2 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{7} + 3\sqrt{3}}{8},$$

$$6^2 = |AC|^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2 \cdot |AC| \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}$$

ALBO

– zapisanie długości boków trójkąta  $ACE$  za pomocą jednej niewiadomej i zapisanie równania z tą jedną niewiadomą, które prowadzi do jej obliczenia, np.  $|AE| = 3x$  oraz  $|AC| = 4x$ , oraz  $|EC| = \sqrt{7}x$ , oraz  $(4\sqrt{3} - \sqrt{7}x)^2 + (3x)^2 = 6^2$  (dla sposobu II),

ALBO

– obliczenie sinusa kąta  $ABC$ :  $\frac{-3 + \sqrt{21}}{8}$  (dla sposobu III).

2 pkt – obliczenie miary kąta  $BAC$ :  $120^\circ$

ALBO

– zapisanie długości boków trójkąta  $ACE$  za pomocą jednej niewiadomej, np.

$$|AE| = 3x \text{ oraz } |AC| = 4x, \text{ oraz } |EC| = \sqrt{7}x,$$

ALBO

– obliczenie cosinusa kąta  $ACB$ :  $\frac{\sqrt{7}}{4}$ .

1 pkt – zapisanie równania, w którym jedyną niewiadomą jest miara kąta  $BAC$  (lub miara kąta  $ACB$ ), np.  $\frac{4\sqrt{3}}{\sin|\sphericalangle BAC|} = 8$ ,  $\frac{6}{\sin|\sphericalangle ACB|} = 8$ ,  $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sin|\sphericalangle BAC| = \frac{6 \cdot 4\sqrt{3}}{4 \cdot 4}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwaga:**

Jeżeli zdający uzyska  $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$  oraz  $|\sphericalangle BAC| = 120^\circ$  i konsekwentnie obliczy długość boku  $AC$  dla obu tych wartości kątów, ale w rozwiązaniu nie odrzuci wartości  $|AC| = 3 + \sqrt{21}$ , to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

**Przykładowe pełne rozwiązania***Sposób I*

Oznaczmy przez  $R$  promień okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ .

Stosujemy do trójkąta  $ABC$  twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

$$\frac{|BC|}{\sin|\sphericalangle BAC|} = 2R$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sin|\sphericalangle BAC|} = 8$$

Stąd  $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$  lub  $|\sphericalangle BAC| = 120^\circ$ .

Długość boku trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg o promieniu  $R$  jest równa  $R\sqrt{3} = 4\sqrt{3} = |BC|$ . Niech  $D$  będzie wierzchołkiem trójkąta równobocznego  $BCD$  wpisanego w dany okrąg. Ponieważ  $|AB| = 6$ , więc  $A \neq D$ . Gdyby wierzchołek  $A$  leżał na krótszym z łuków  $BD$ , to wówczas  $AC$  byłby najdłuższym bokiem trójkąta  $ABC$ . Gdyby wierzchołek  $A$  leżał na krótszym z łuków  $CD$ , to wówczas  $AB$  byłby najdłuższym bokiem trójkąta  $ABC$ . Zatem  $A$  leży na krótszym z łuków  $BC$  okręgu i  $|\sphericalangle BAC| = 120^\circ$ .

Stosujemy do trójkąta  $ABC$  twierdzenie cosinusów i obliczamy długość boku  $AC$ :

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos|\sphericalangle BAC|$$

$$(4\sqrt{3})^2 = |AC|^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot |AC| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$|AC|^2 + 6 \cdot |AC| - 12 = 0$$

$$|AC| = -3 + \sqrt{21} \quad \vee \quad |AC| = -3 - \sqrt{21} < 0$$

Zatem  $|AC| = -3 + \sqrt{21}$ .

*Sposób II*

Oznaczmy przez  $R$  promień okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ .

Stosujemy do trójkąta  $ABC$  twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

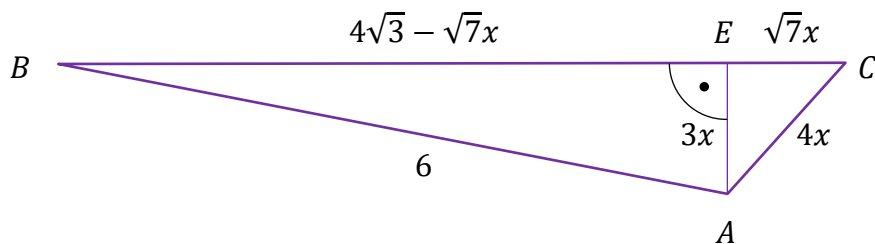
$$\frac{|AB|}{\sin|\sphericalangle ACB|} = 2R$$

$$\frac{6}{\sin|\sphericalangle ACB|} = 8$$

Stąd  $\sin|\sphericalangle ACB| = \frac{3}{4}$ .

Niech  $E$  będzie spodkiem wysokości poprowadzonej w trójkącie  $ABC$  z wierzchołka  $A$  na bok  $BC$ .

Oznaczmy  $|AE| = 3x$ . Wtedy  $|AC| = 4x$ ,  $|EC| = \sqrt{7}x$ ,  $|BE| = 4\sqrt{3} - \sqrt{7}x$  (zobacz rysunek).



Stosujemy do trójkąta  $AEB$  twierdzenie Pitagorasa i otrzymujemy

$$\begin{aligned} (4\sqrt{3} - \sqrt{7}x)^2 + (3x)^2 &= 6^2 \\ 16x^2 - 8\sqrt{21}x + 12 &= 0 \\ 4x^2 - 2\sqrt{21}x + 3 &= 0 \\ x &= \frac{2\sqrt{21} - 6}{8} \quad \vee \quad x = \frac{2\sqrt{21} + 6}{8} \\ 4x &= \sqrt{21} - 3 \quad \vee \quad 4x = \sqrt{21} + 3 \end{aligned}$$

Ponieważ  $\sqrt{21} + 3 > 7 > 4\sqrt{3} = |BC|$ , więc ostatecznie  $|AC| = \sqrt{21} - 3$ .

### Sposób III

Oznaczmy przez  $R$  promień okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ .

Stosujemy do trójkąta  $ABC$  twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{|BC|}{\sin|\sphericalangle BAC|} &= 2R \\ \frac{4\sqrt{3}}{\sin|\sphericalangle BAC|} &= 8 \end{aligned}$$

Stąd  $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$  lub  $|\sphericalangle BAC| = 120^\circ$ .

Długość boku trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg o promieniu  $R$  jest równa  $R\sqrt{3} = 4\sqrt{3} = |BC|$ . Niech  $D$  będzie wierzchołkiem trójkąta równobocznego  $BCD$  wpisanego w dany okrąg. Ponieważ  $|AB| = 6$ , więc  $A \neq D$ . Gdyby wierzchołek  $A$  leżał na krótszym z łuków  $BD$ , to wówczas  $AC$  byłby najdłuższym bokiem trójkąta  $ABC$ . Gdyby wierzchołek  $A$  leżał na krótszym z łuków  $CD$ , to wówczas  $AB$  byłby najdłuższym bokiem trójkąta  $ABC$ . Zatem  $A$  leży na krótszym z łuków  $BC$  okręgu i  $|\sphericalangle BAC| = 120^\circ$ .

Ponownie stosujemy do trójkąta  $ABC$  twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{|AB|}{\sin|\sphericalangle ACB|} &= 2R \\ \frac{6}{\sin|\sphericalangle ACB|} &= 8 \end{aligned}$$

$$\text{Stąd } \sin|\sphericalangle ACB| = \frac{3}{4}.$$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i otrzymujemy

$$\sin^2|\sphericalangle ACB| + \cos^2|\sphericalangle ACB| = 1$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2|\sphericalangle ACB| = 1$$

$$\cos|\sphericalangle ACB| = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \vee \quad \cos|\sphericalangle ACB| = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

Ponieważ  $AB$  nie jest najdłuższym bokiem trójkąta, więc kąt  $ACB$  nie jest rozwarty

$$\text{i dlatego } \cos|\sphericalangle ACB| = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Obliczamy  $\sin|\sphericalangle ABC|$ :

$$\begin{aligned} \sin|\sphericalangle ABC| &= \sin(180^\circ - |\sphericalangle BAC| - |\sphericalangle ACB|) = \sin(|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ACB|) = \\ &= \sin|\sphericalangle BAC| \cdot \cos|\sphericalangle ACB| + \sin|\sphericalangle ACB| \cdot \cos|\sphericalangle BAC| = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-3 + \sqrt{21}}{8} \end{aligned}$$

Stosujemy do trójkąta  $ABC$  twierdzenie sinusów i otrzymujemy

$$\frac{|AC|}{\sin|\sphericalangle ABC|} = 2R$$

$$|AC| = 2R \cdot \sin|\sphericalangle ABC|$$

$$|AC| = 8 \cdot \frac{-3 + \sqrt{21}}{8} = -3 + \sqrt{21}$$

Uwaga:

Po obliczeniu  $\cos|\sphericalangle ACB|$  można obliczyć  $\cos|\sphericalangle ABC|$ :

$$\begin{aligned} \cos|\sphericalangle ABC| &= \cos(180^\circ - |\sphericalangle BAC| - |\sphericalangle ACB|) = -\cos(|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ACB|) = \\ &= -\cos|\sphericalangle BAC| \cdot \cos|\sphericalangle ACB| + \sin|\sphericalangle ACB| \cdot \sin|\sphericalangle BAC| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{7} + 3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

Po zastosowaniu twierdzenia cosinusów otrzymujemy:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos|\sphericalangle ABC|$$

$$|AC|^2 = 6^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{7} + 3\sqrt{3}}{8}$$

$$|AC| = \sqrt{30 - 6\sqrt{21}}$$

$$|AC| = \sqrt{(\sqrt{21} - 3)^2}$$

$$|AC| = \sqrt{21} - 3$$

**Zadanie 9. (0–4)**

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie $4 \cos 2x \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$ .

**Zasady oceniania**

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $\frac{k\pi}{5}$  oraz  $-\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$  oraz  $\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

3 pkt – rozwiązanie równania  $\sin(5x) = 0$  w zbiorze liczb rzeczywistych:  $\frac{k\pi}{5}$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$   
ALBO

– rozwiązanie równania  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  w zbiorze liczb rzeczywistych:  $-\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$  lub  $\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

2 pkt – przekształcenie równoważne równania do postaci alternatywy dwóch równań trygonometrycznych:  $\sin(5x) = 0$  lub  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

1 pkt – zastosowanie wzorów na sinus sumy i różnicy kątów i przekształcenie równania do postaci

$$\sin(5x) \cos x + \cos(5x) \sin x + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(5x) \cos x - \cos(5x) \sin x = 0$$

ALBO

– zastosowanie wzoru na sumę sinusów i przekształcenie równania do postaci

$$2 \sin \frac{6x+4x}{2} \cos \frac{6x-4x}{2} + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) = 0.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązania***Sposób I*

Stosujemy wzory na sinus sumy oraz różnicy kątów i przekształcamy równanie równoważnie, otrzymując:

$$\sin(6x) + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(4x) = 0$$

$$\sin(5x + x) + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(5x - x) = 0$$

$$\sin(5x) \cos x + \cos(5x) \sin x + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(5x) \cos x - \cos(5x) \sin x = 0$$

$$\sin(5x) \cdot (2 \cos x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\sin(5x) = 0 \quad \vee \quad 2 \cos x + \sqrt{3} = 0$$

$$5x = k\pi \quad \vee \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x = \frac{k\pi}{5} \quad \vee \quad x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi k \quad \vee \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k$$

gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

### Sposób II

Stosujemy wzór na sumę sinusów i przekształcamy równanie równoważnie, otrzymując:

$$\sin(6x) + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(4x) = 0$$
$$2 \sin \frac{6x + 4x}{2} \cos \frac{6x - 4x}{2} + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) = 0$$
$$2 \sin(5x) \cos x + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) = 0$$
$$\sin(5x) \cdot (2 \cos x + \sqrt{3}) = 0$$
$$\sin(5x) = 0 \quad \vee \quad 2 \cos x + \sqrt{3} = 0$$
$$5x = k\pi \quad \vee \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x = \frac{k\pi}{5} \quad \vee \quad x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi k \quad \vee \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k$$

gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

## Zadanie 10. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: X.3) rozpoznaje w graniastoslupach [...] kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi), oblicza miary tych kątów; X.4) oblicza [...] pola powierzchni graniastoslupów [...], również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

## Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $\frac{\sqrt{3}a^2}{2} + 3\sqrt{2}a^2$ .

3 pkt – wyznaczenie wysokości graniastoslupa:  $a\sqrt{2}$ .

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (wysokością graniastoslupa), np.

$$(H^2 + a^2) + (H^2 + a^2) - 2 \cdot \sqrt{H^2 + a^2} \cdot \sqrt{H^2 + a^2} \cdot \frac{5}{6} = a^2$$

1 pkt – obliczenie cosinusa kąta  $\alpha$ :  $\frac{5}{6}$

ALBO

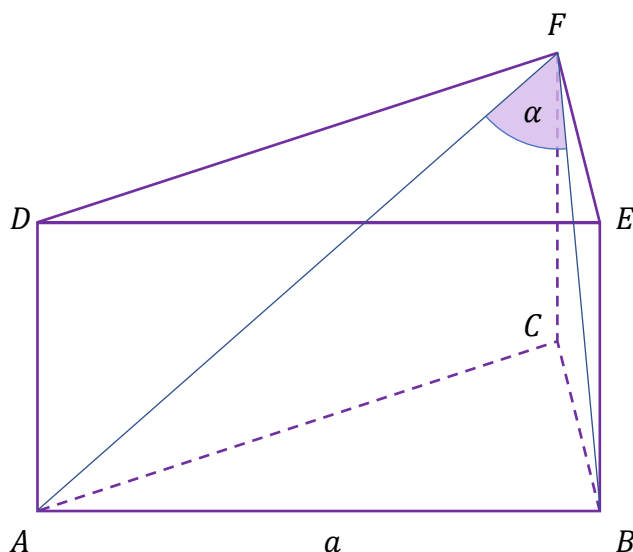
– zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta  $ABF$  i zapisanie równania

$$|AF|^2 + |BF|^2 - 2 \cdot |AF| \cdot |BF| \cdot \cos \alpha = a^2.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

## Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Oznaczmy ponadto przez  $H$  wysokość graniastosłupa.

Korzystamy z tożsamości  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  i obliczamy  $\cos \alpha$ :

$$\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{25}{36}$$

więc  $\cos \alpha = \frac{5}{6}$ , gdyż  $\alpha$  jest kątem ostrym.

Stosujemy do trójkąta  $ABF$  twierdzenie cosinusów, a następnie korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i otrzymujemy:

$$|AF|^2 + |BF|^2 - 2 \cdot |AF| \cdot |BF| \cdot \cos \alpha = a^2$$

$$(H^2 + a^2) + (H^2 + a^2) - 2 \cdot \sqrt{H^2 + a^2} \cdot \sqrt{H^2 + a^2} \cdot \frac{5}{6} = a^2$$

$$\frac{1}{3} \cdot (H^2 + a^2) = a^2$$

$$H = a\sqrt{2}$$

Obliczamy pole  $P$  powierzchni całkowitej graniastosłupa:

$$P = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2} + 3\sqrt{2}a^2$$

**Zadanie 11. (0–6)**

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.R3) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej.

**Zasady oceniania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

**Pierwszy etap** polega na obliczeniu współrzędnych punktów  $A$  oraz  $B$ . Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **2 punkty**.

Podział punktów za pierwszy etap rozwiązania:

2 pkt – obliczenie współrzędnych punktów  $A$  oraz  $B$  przecięcia paraboli i prostej

$$3x + y = 2 = 0: A = (-3, 7) \text{ oraz } B = (2, -8).$$

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (jedną ze współrzędnych punktu  $A$  lub  $B$ ),

$$\text{które wynika z układu równań } \begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ 3x + y + 2 = 0 \end{cases}, \text{ np.}$$

$$3x + x^2 - 2x - 8 + 2 = 0, y = \left(-\frac{y+2}{3}\right)^2 + \frac{2(y+2)}{3} - 8.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Drugi etap** polega na obliczeniu współrzędnych punktu  $C$ . Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktu  $C$ :  $C = (6, -2)$ .

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (pierwszą/drugą współrzędną punktu  $C$ ), np.

$$\frac{|3c + (-\frac{1}{2}c + 1) + 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{9\sqrt{10}}{5}.$$

1 pkt – uzależnienie drugiej/pierwszej współrzędnej punktu  $C$  od pierwszej/drugiej

$$\text{współrzędnej, np. } C = \left(c, -\frac{1}{2}c + 1\right).$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Trzeci etap** polega na obliczeniu długości boku  $BC$ .

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – obliczenie długości boku  $BC$  równoległoboku:  $|BC| = 2\sqrt{13}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Obliczamy współrzędne punktów przecięcia paraboli z prostą o równaniu  $3x + y + 2 = 0$ :

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ 3x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ 3x + x^2 - 2x - 8 + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ x = -3 \vee x = 2 \end{cases}$$

Stąd  $A = (-3, 7)$  oraz  $B = (2, -8)$ .

Punkt  $C$  leży na prostej o równaniu  $y = -\frac{1}{2}x + 1$  i ma pierwszą współrzędną dodatnią, więc  $C = (c, -\frac{1}{2}c + 1)$  przy pewnym  $c > 0$ .

Korzystamy ze wzoru na odległość punktu od prostej i otrzymujemy kolejno:

$$\frac{|3c + (-\frac{1}{2}c + 1) + 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{9\sqrt{10}}{5}$$

$$\frac{|2,5c + 3|}{\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{5}$$

$$|2,5c + 3| = 18$$

$$c = 6 \vee c = -\frac{42}{5}$$

Zatem  $C = (6, -2)$ .

Obliczamy długość boku  $BC$ :

$$|BC| = \sqrt{(6 - 2)^2 + (-2 + 8)^2} = 2\sqrt{13}$$

**Zadanie 12. (0–6)**

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: III.R3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych; III.R5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

**Zasady oceniania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

**Pierwszy etap** polega na zapisaniu warunku  $\Delta > 0$  w postaci nierówności z niewiadomą  $m$  i rozwiązaniu tej nierówności. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – zapisanie warunku  $\Delta > 0$  w postaci nierówności z niewiadomą  $m$  i rozwiązanie tej nierówności:  $(m + 1)^2 + 4 \cdot (3 - m) \cdot (m + 1)^2 > 0$  oraz  $m \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{13}{4}\right)$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwaga:**

Jeżeli zdający rozwiązuje warunek  $\Delta \geq 0$ , to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

**Drugi etap** polega na wyznaczeniu tych wartości parametru  $m$ , dla których jest spełniony warunek  $x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7$ . Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **4 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

4 pkt – wyznaczenie wszystkich wartości parametru  $m$ , dla których jest spełniony warunek

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7: 1, \frac{-3-2\sqrt{42}}{3}, \frac{-3+2\sqrt{42}}{3}.$$

3 pkt – zapisanie równania z niewiadomą  $m$  w postaci  $\frac{-3m^3-3m^2+59m-53}{(3-m)^2} = 0$  lub

$3m^3 + 3m^2 - 59m + 53 = 0$  **oraz** wyznaczenie jednego z rozwiązań tego równania (np.  $m = 1$ ) i podzielenie wielomianu  $3m^3 + 3m^2 - 59m + 53$  przez odpowiedni dwumian, np.  $(3m^3 + 3m^2 - 59m + 53) : (m - 1) = 3m^2 + 6m - 53$   
**ALBO**

– zapisanie równania z niewiadomą  $m$  w postaci  $\frac{-3m^3-3m^2+59m-53}{(3-m)^2} = 0$  lub

$3m^3 + 3m^2 - 59m + 53 = 0$  **oraz** zastosowanie metody grupowania i zapisanie wielomianu  $3m^3 + 3m^2 - 59m + 53$  w postaci iloczynu co najmniej dwóch wielomianów stopni dodatnich, np.  $(m - 1)(3m^2 + 6m - 53)$ .

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą  $m$ , wynikającego z warunku

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7, \text{ np. } \left(-\frac{m+1}{3-m}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-(m+1)}{3-m} = \frac{-(m+1)^2}{3-m} + 7.$$

1 pkt – przekształcenie warunku  $x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7$  do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, np.  $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1x_2 + 7$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Trzeci** etap polega na zapisaniu warunku  $3 - m \neq 0$  oraz wyznaczeniu wszystkich wartości parametru  $m$ , które spełniają jednocześnie warunki:  $3 - m \neq 0$  i  $\Delta > 0$ , i  $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1x_2 + 7$ .

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – zapisanie warunku  $3 - m \neq 0$  i poprawne wyznaczenie wszystkich wartości parametru  $m$ , które spełniają jednocześnie warunki  $3 - m \neq 0$  i  $\Delta > 0$ ,

$$\text{i } (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1x_2 + 7: 1, \frac{-3-2\sqrt{42}}{3}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

## Przykładowe pełne rozwiązania

### I etap

Równanie  $(3 - m)x^2 + (m + 1)x - (m + 1)^2 = 0$  ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste tylko wtedy, gdy  $3 - m \neq 0$  i wyróżnik trójmianu  $(3 - m)x^2 + (m + 1)x - (m + 1)^2$  jest dodatni. Rozwiązujemy warunek  $\Delta > 0$ :

$$(m + 1)^2 + 4 \cdot (3 - m)(m + 1)^2 > 0$$

$$(m + 1)^2 [1 + 4 \cdot (3 - m)] > 0$$

$$(m + 1)^2 \cdot (13 - 4m) > 0$$

$$-4 \cdot (m + 1)^2 \cdot \left(m - \frac{13}{4}\right) > 0$$

$$m \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{13}{4}\right)$$

### II etap

#### Sposób I

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których jest spełniony warunek  $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 7$ , korzystając ze wzorów Viète'a:

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1x_2 + 7$$

$$\left(-\frac{m+1}{3-m}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-(m+1)^2}{3-m} = \frac{-(m+1)^2}{3-m} + 7$$

$$\left(\frac{m+1}{m-3}\right)^2 - 3 \cdot \frac{(m+1)^2}{m-3} - 7 = 0$$

$$\frac{(m+1)^2 - 3 \cdot (m+1)^2(m-3) - 7(m-3)^2}{(m-3)^2} = 0$$

$$m^2 + 2m + 1 - 3(m^2 + 2m + 1)(m-3) - 7(m^2 - 6m + 9) = 0 \quad \wedge \quad m \neq 3$$

$$-3m^3 - 3m^2 + 59m - 53 = 0 \quad \wedge \quad m \neq 3$$

$$-3m^3 + 3m - 3m^2 + 3m + 53m - 53 = 0 \quad \wedge \quad m \neq 3$$

$$-3m(m^2 - 1) - 3m(m-1) + 53(m-1) = 0 \quad \wedge \quad m \neq 3$$

$$(m-1)[-3m(m+1) - 3m + 53] = 0 \quad \wedge \quad m \neq 3$$

$$(m-1)[-3m^2 - 6m + 53] = 0 \quad \wedge \quad m \neq 3$$

$$\left(m = 1 \quad \vee \quad m = \frac{-3 - 2\sqrt{42}}{3} \quad \vee \quad m = \frac{-3 + 2\sqrt{42}}{3}\right) \quad \wedge \quad m \neq 3$$

$$m = 1 \quad \vee \quad m = \frac{-3 - 2\sqrt{42}}{3} \quad \vee \quad m = \frac{-3 + 2\sqrt{42}}{3}$$

### Sposób II

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których jest spełniony warunek  $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 7$ , korzystając ze wzorów Viète'a:

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1x_2 + 7$$

$$\left(-\frac{m+1}{3-m}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-(m+1)^2}{3-m} = \frac{-(m+1)^2}{3-m} + 7$$

$$\left(\frac{m+1}{m-3}\right)^2 - 3 \cdot \frac{(m+1)^2}{m-3} - 7 = 0$$

$$\frac{(m+1)^2 - 3 \cdot (m+1)^2(m-3) - 7(m-3)^2}{(m-3)^2} = 0$$

$$m^2 + 2m + 1 - 3(m^2 + 2m + 1)(m-3) - 7(m^2 - 6m + 9) = 0 \quad \wedge \quad m \neq 3$$

$$-3m^3 - 3m^2 + 59m - 53 = 0 \quad \wedge \quad m \neq 3$$

Zauważamy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu  $-3m^3 - 3m^2 + 59m - 53$ . Dzielimy wielomian  $-3m^3 - 3m^2 + 59m - 53$  przez dwumian  $m - 1$ . Dzielenie to możemy wykonać, korzystając np. z algorytmu Hornera

	-3	-3	59	-53
1	-3	-6	53	0

Otrzymujemy  $(m - 1)(-3m^2 - 6m + 53) = 0$ . Stąd  $m = 1$  lub  $m = \frac{-3-2\sqrt{42}}{3}$ , lub  $m = \frac{-3+2\sqrt{42}}{3}$ .

### III etap

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru  $m \neq 3$ , które jednocześnie spełniają warunki  $m \in (-\infty, -1) \cup (-1, \frac{13}{4})$  oraz  $m \in \left\{1, \frac{-3-2\sqrt{42}}{3}, \frac{-3+2\sqrt{42}}{3}\right\}$ :  $m \in \left\{1, \frac{-3-2\sqrt{42}}{3}\right\}$ .

**Zadanie 13.1. (0–2)**

<b>Wymagania egzaminacyjne 2024</b>	
<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymaganie szczegółowe</b>
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: X.4) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów i ostrosłupów, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

**Zasady oceniania**

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – wyznaczenie pola  $P_p$  podstawy ostrosłupa w zależności od promienia  $R$  okręgu

$$\text{opisanego na podstawie: } P_p = \frac{(R\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$A, B, C$  – wierzchołki podstawy ostrosłupa,

$S$  – wierzchołek ostrosłupa,

$H$  – wysokość ostrosłupa poprowadzona z wierzchołka  $S$  na płaszczyznę podstawy  $ABC$ ,

$a$  – długość krawędzi podstawy ostrosłupa.

Podstawa  $ABC$  ostrosłupa jest trójkątem równobocznym, więc promień  $R$  okręgu

opisanego na podstawie jest równy  $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Stąd  $a = R\sqrt{3}$ . Zatem pole  $P_p$  podstawy

$$\text{jest równe } P_p = \frac{(R\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

Ponieważ  $H + R = 6$ , więc  $H = 6 - R$ .

Wyznaczamy objętość  $V$  ostrosłupa w zależności od  $R$ :

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} \cdot (6 - R) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6R^2 - R^3)$$

**Zadanie 13.2. (0–4)**

<b>Wymagania egzaminacyjne 2024</b>	
<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymagania szczegółowe</b>
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.R3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu; XIII.R4) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.R5) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

**Zasady oceniania**

- 4 pkt – uzasadnienie, że funkcja  $V$  przyjmuje wartość największą dla  $R = 4$  i obliczenie wartości największej funkcji  $V$ :  $8\sqrt{3}$ .
- 3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja  $V$  przyjmuje wartość największą dla  $R = 4$   
ALBO
- przekształcenie nierówności  $\frac{R+R+12-2R}{3} \geq \sqrt[3]{R \cdot R \cdot (12-2R)}$  do postaci  $\frac{\sqrt{3}}{8} \cdot 64 \geq \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6R^2 - R^3)$  **oraz** zapisanie, że równość zachodzi tylko wtedy, gdy liczby  $R$  oraz  $12 - 2R$  są równe.
- 2 pkt – obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji  $V$ :  $R = 4$   
ALBO
- obliczenie wartości  $R$ , dla której zachodzi równość średniej arytmetycznej i geometrycznej liczb dodatnich  $R$ ,  $R$  oraz  $12 - 2R$ :  $R = 4$ ,  
ALBO
  - przekształcenie nierówności  $\frac{R+R+12-2R}{3} \geq \sqrt[3]{R \cdot R \cdot (12-2R)}$  do postaci  $\frac{\sqrt{3}}{8} \cdot 64 \geq \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6R^2 - R^3)$ .
- 1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji  $V$ :  $V'(R) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (12R - 3R^2)$   
ALBO
- zapisanie nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną liczb  $R$ ,  $R$  oraz  $12 - 2R$ :  $\frac{R+R+12-2R}{3} \geq \sqrt[3]{R \cdot R \cdot (12-2R)}$ .
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

1. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość największą dla wyznaczonej wartości  $R$ , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej oraz:

- opisuje (słownie lub graficznie - np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji  $V$
  - LUB
  - zapisuje, że dla wyznaczonej wartości  $R$  funkcja  $V$  ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie jej największa wartość,
  - LUB
  - zapisuje, że dla wyznaczonej wartości  $R$  funkcja  $V$  ma maksimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.
2. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku, np. znakami „+” i „-” znak pochodnej.
3. Jeżeli zdający przedstawi niepełne uzasadnienie, że dla  $R = 4$  funkcja  $V$  osiąga najmniejszą wartość i obliczy  $V(4) = 8\sqrt{3}$ , to otrzymuje **3 punkty** za całe rozwiązanie. Jeśli zdający nie przedstawi żadnego uzasadnienia i obliczy  $V(4) = 8\sqrt{3}$ , to otrzymuje co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

### Przykładowe pełne rozwiązania

#### Sposób I

Wyznaczamy pochodną funkcji  $V$ :  $V'(R) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (12R - 3R^2)$  dla  $R \in (0, 6)$ .

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji  $V$ :

$$V'(R) = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (12R - 3R^2) = 0$$

$$3R \cdot (4 - R) = 0$$

$$R = 0 \notin (0, 6) \text{ lub } R = 4 \in (0, 6)$$

Badamy znak pochodnej:

$$V'(R) > 0 \text{ dla } R \in (0, 4),$$

$$V'(R) < 0 \text{ dla } R \in (4, 6).$$

Zatem funkcja  $V$  jest rosnąca w przedziale  $(0, 4]$  oraz jest malejąca w przedziale  $[4, 6)$ .

Stąd dla  $R = 4$  funkcja  $V$  osiąga wartość największą równą

$$V(4) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6 \cdot 4^2 - 4^3) = 8\sqrt{3}$$

#### Sposób II

Ponieważ  $R \in (0, 6)$ , więc liczby  $R$ ,  $R$  oraz  $12 - 2R$  są dodatnie. Z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną dla liczb dodatnich  $R$ ,  $R$  oraz  $12 - 2R$  otrzymujemy

$$\frac{R + R + 12 - 2R}{3} \geq \sqrt[3]{R \cdot R \cdot (12 - 2R)}$$

$$\begin{aligned}4 &\geq \sqrt[3]{2 \cdot (6R^2 - R^3)} \\64 &\geq 2 \cdot (6R^2 - R^3) \\ \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot 64 &\geq \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6R^2 - R^3) \\ 8\sqrt{3} &\geq V(R)\end{aligned}$$

przy czym równość zachodzi tylko dla tych  $R$ , dla których  $R = 12 - 2R$  i jednocześnie  $R \in (0, 6)$ , tj. dla  $R = 4$ .

Zatem funkcja  $V$  osiąga wartość największą dla  $R = 4$  i wtedy  $V(4) = 8\sqrt{3}$ .