CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny** **Test diagnostyczny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**
Formy arkusza:	MMAP-R0-100-2212, MMAP-R0-200-2212, MMAP-R0-300-2212, MMAP-R0-400-2212, MMAP-R0-700-2212, MMAP-R0-Q00-2212, MMAP-R0-Z00-2212
Data publikacji dokumentu:	20 grudnia 2022 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi. I.R1) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne zastosowanie wzorów na logarytm potęgi oraz na zamianę podstawy logarytmu i poprawny wynik: $\frac{9}{2}$.

1 pkt – zastosowanie wzoru na zamianę podstawy logarytmu i zapisanie wyrażenia $\frac{\log_3 5\cdot\log_{25}27}{\log_7\sqrt[6]{49}}$ w postaci np.: $\frac{\log_3 5\cdot\frac{\log_3 27}{\log_3 25}}{\log_7\sqrt[6]{49}}$, $\frac{\frac{\log_{10}5}{\log_{10}3}\cdot\frac{\log_{10}27}{\log_{10}25}}{\frac{\log_{10}\sqrt[6]{49}}{\log_{10}7}}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Stosujemy wzór na zamianę podstawy logarytmu i otrzymujemy

$$\frac{\log_3 5\cdot\log_{25}27}{\log_7\sqrt[6]{49}}=\frac{\log_3 5\cdot\frac{\log_3 27}{\log_3 25}}{\log_7\sqrt[6]{49}}=\frac{\log_3 5\cdot\frac{\log_3 27}{\log_3 5^2}}{\log_7(7^2)^{\frac{1}{6}}}$$

Stosujemy wzór na logarytm potęgi i korzystamy z definicji logarytmu, otrzymując

$$\frac{\log_3 5\cdot\frac{\log_3 27}{\log_3 5^2}}{\log_7(7^2)^{\frac{1}{6}}}=\frac{\log_3 5\cdot\frac{3}{2\log_3 5}}{\frac{1}{3}\log_7 7}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{9}{2}$$

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (Dz.U. poz. 1246).

Zadanie 2.1. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.R1) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysuje wykres funkcji $y = \|f(x)\|$.

Zasady oceniania

2 pkt – obliczenie wartości funkcji $g(11)$ oraz zapisanie zbioru wszystkich wartości, jakie funkcja g przyjmuje w przedziale $[9,11]$: $g(11) = \frac{9}{4}$ oraz $\left[0,\frac{9}{4}\right]$.

1 pkt – obliczenie miejsc zerowych funkcji g i obliczenie pierwszej współrzędnej p punktu, w którym funkcja ma maksimum lokalne (lub zapisanie, że $p \notin [9,11]$): 2 i 10 oraz $p = 6$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy miejsca zerowe funkcji g:

$$\left|-\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5\right| = 0$$

$$-\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{lub} \quad x = 10$$

Niech f będzie funkcją kwadratową określoną wzorem $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5$.
W przedziale $[2,10]$ funkcja f przyjmuje wartości nieujemne, więc w tym przedziale wykres funkcji g pokrywa się z wykresem funkcji f. W przedziałach $(-\infty,2)$ oraz $(10,+\infty)$ funkcja f przyjmuje wartości ujemne, więc w tych przedziałach wykres funkcji g jest obrazem wykresu funkcji f w symetrii względem osi Ox układu współrzędnych.
Obliczamy pierwszą współrzędną p wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f:

$p = -\frac{3}{2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)} = 6.$

Ponieważ $p < 9$, więc funkcja g w przedziale $[9,10]$ jest malejąca, a w przedziale $[10,11]$ jest rosnąca. Obliczamy $g(9)$ i $g(11)$:

$$g(9) = \left|-\frac{1}{4}\cdot 9^2 + 3\cdot 9 - 5\right| = \left|-\frac{1}{4}\cdot 81 + 27 - 5\right| = \left|-20\frac{1}{4} + 22\right| = \frac{7}{4}$$

$$g(11) = \left|-\frac{1}{4}\cdot 11^2 + 3\cdot 11 - 5\right| = \left|-\frac{1}{4}\cdot 121 + 33 - 5\right| = \left|-30\frac{1}{4} + 28\right| = \frac{9}{4}$$

Zbiorem wszystkich wartości, jakie funkcja g przyjmuje w zbiorze $[9,11]$, jest $\left[0,\frac{9}{4}\right]$.

Zadanie 2.2. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: III.R4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną […]; III.R5) analizuje […] równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Zasady oceniania

2 pkt – obliczenie wartości m dla których równanie $g(x) = |m|$ posiada dwa rozwiązania tego samego znaku: $m \in (-5,-4) \cup \{0\} \cup (4,5)$.

1 pkt – obliczenie/zapisanie drugiej współrzędnej punktu przecięcia wykresu funkcji g z osią Oy oraz obliczenie wartości q lokalnego maksimum funkcji g: 5 oraz $q = 4$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy drugą współrzędną punktu przecięcia wykresu funkcji g z osią Oy:

$$g(0) = |-5| = 5$$

Niech f będzie funkcją kwadratową określoną wzorem $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5$.

Obliczamy drugą współrzędną q wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f:

$$q = -\frac{3^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-5)}{4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = 4$$

Wykres funkcji g jest wykresem funkcji $y = |f(x)|$, więc funkcja g ma lokalne maksimum równe 4.

Przyjmijmy $k = |m|$. Na podstawie analizy własności funkcji g wyznaczamy wartości k dla których równanie $g(x) = k$ posiada dwa rozwiązania dodatnie: $k \in (4,5) \cup \{0\}$.

Obliczamy wartości parametru m:

$$|m| = 0 \text{ lub } 4 < |m| < 5$$

Stąd $m = 0$ lub $m \in (-5,-4) \cup (4,5)$.

Zatem $m \in (-5,-4) \cup \{0\} \cup (4,5)$.

Zadanie 3. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: II.R3) korzysta ze wzorów na: $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3+b^3 i a^3-b^3.

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu, tj. przekształcenie nierówności do postaci $(x+y-1)(x-y)^2 \geq 0$ oraz uzasadnienie jej prawdziwości dla wszystkich liczb rzeczywistych x oraz y spełniających warunek $x+y \geq 1$.

2 pkt – przekształcenie nierówności do postaci $(x+y-1)(x-y)^2 \geq 0$.

1 pkt – przekształcenie nierówności do postaci, w której wyrażenie $(x+y)$ występuje jako wspólny czynnik w co najmniej dwóch iloczynach, np.
$(x+y)(x^2-xy+y^2) - xy(x+y) - x^2 + 2xy - y^2 \geq 0$
ALBO
przekształcenie nierówności do postaci, w której wyrażenie $(x-y)$ występuje jako wspólny czynnik w co najmniej dwóch iloczynach, np.
$x^2(x-y) - y^2(x-y) - (x-y)^2 \geq 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy nierówność $x^3 + 2xy + y^3 \geq x^2 + xy(x+y) + y^2$ w sposób równoważny

$$x^3 + y^3 - xy(x+y) - x^2 + 2xy - y^2 \geq 0$$

$$(x+y)(x^2-xy+y^2) - xy(x+y) - (x^2-2xy+y^2) \geq 0$$

$$(x+y)[(x^2-xy+y^2) - xy] - (x-y)^2 \geq 0$$

$$(x+y)(x^2-2xy+y^2) - (x-y)^2 \geq 0$$

$$(x+y)(x-y)^2 - (x-y)^2 \geq 0$$

$$(x-y)^2(x+y-1) \geq 0$$

Ponieważ:

- z założenia $x+y \geq 1$ wynika, że $x+y-1 \geq 0$
- kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną,

więc iloczyn $(x-y)^2(x+y-1)$ jest liczbą nieujemną jako iloczyn liczb nieujemnych $x+y-1$ oraz $(x-y)^2$.

To oznacza, że nierówność $x^3 + 2xy + y^3 \geq x^2 + xy(x+y) + y^2$ jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych x oraz y spełniających warunek $x+y \geq 1$.

To należało wykazać.

Sposób II

Przekształcamy nierówność $x^3 + 2xy + y^3 \geq x^2 + xy(x + y) + y^2$ w sposób równoważny

$$x^3 + y^3 - xy(x + y) - x^2 + 2xy - y^2 \geq 0$$

$$x^3 - x^2y + y^3 - xy^2 - (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$$

$$x^2(x - y) - y^2(x - y) - (x - y)^2 \geq 0$$

$$(x^2 - y^2)(x - y) - (x - y)^2 \geq 0$$

$$(x + y)(x - y)^2 - (x - y)^2 \geq 0$$

$$(x - y)^2(x + y - 1) \geq 0$$

Ponieważ:

- z założenia $x + y \geq 1$ wynika, że $x + y - 1 \geq 0$
- kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną,

więc iloczyn $(x - y)^2(x + y - 1)$ jest liczbą nieujemną jako iloczyn liczb nieujemnych $x + y - 1$ oraz $(x - y)^2$.

To oznacza, że nierówność $x^3 + 2xy + y^3 \geq x^2 + xy(x + y) + y^2$ jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych x oraz y spełniających warunek $x + y \geq 1$.

To należało wykazać.

Zadanie 4. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: XII.R2) stosuje schemat Bernoullego.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia prawdopodobieństwa i poprawny wynik: $P(A) \approx 0{,}68$.

2 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w n próbach Bernoullego i zapisanie prawdopodobieństwa zdarzenia A w postaci $P(A) = \binom{20}{0} \cdot (0{,}1)^0 \cdot (0{,}9)^{20} + \binom{20}{1} \cdot (0{,}1)^1 \cdot (0{,}9)^{19} + \binom{20}{2} \cdot (0{,}1)^2 \cdot (0{,}9)^{18}$.

1 pkt – określenie sukcesu i porażki w pojedynczej próbie Bernoullego oraz podanie ich prawdopodobieństw: $p = 0{,}1$ oraz $q = 0{,}9$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Próbą Bernoullego jest kontrola masy herbaty nasypanej przez maszynę do torebki. Sukcesem w tej próbie jest uzyskanie torebki herbaty z niedowagą. Prawdopodobieństwo p sukcesu jest równe $0{,}1$, natomiast prawdopodobieństwo q porażki jest równe $0{,}9$.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że wśród wylosowanych do kontroli 20 torebek znajdą się co najwyżej dwie torebki z niedowagą. Przez $P_{20}(k)$ oznaczmy prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wśród skontrolowanych 20 torebek znajdzie się dokładnie k torebek z niedowagą.

Wtedy $P(A) = P_{20}(0) + P_{20}(1) + P_{20}(2)$. Zatem

$$P(A) = \binom{20}{0} \cdot (0{,}1)^0 \cdot (0{,}9)^{20} + \binom{20}{1} \cdot (0{,}1)^1 \cdot (0{,}9)^{19} + \binom{20}{2} \cdot (0{,}1)^2 \cdot (0{,}9)^{18}$$

$$P(A) = (0{,}9)^{18} \cdot 4{,}51 \approx 0{,}68$$

Zadanie 5. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie $4\cos 2x\cos 5x = 2\cos 7x + 1$.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda rozwiązania równania i poprawny wynik: $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

3 pkt – rozwiązanie równania elementarnego $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (lub $\cos x = -\frac{1}{2}$): $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$ (lub: $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ oraz $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

2 pkt – przekształcenie równania $6\sin x + 2\sqrt{3}\cos x + 3\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$ do postaci alternatywy równań trygonometrycznych, np. $3\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$ lub $2\cos x + 1 = 0$, dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

1 pkt – zapisanie, że lewa strona równania ma sens liczbowy dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ oraz przekształcenie lewej strony równania do postaci iloczynu, np. $\left(3\operatorname{tg} x + \sqrt{3}\right)(2\cos x + 1) = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozwiązań równania szukamy wśród liczb $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, gdyż tangens nie jest określony dla liczb postaci $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

Przekształcamy lewą stronę równania do postaci iloczynu:

$$6 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x + 2\sqrt{3}\cos x + 3\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$$

$$6\operatorname{tg} x \cdot \cos x + 2\sqrt{3}\cos x + 3\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$$

$$2\cos x\left(3\operatorname{tg} x + \sqrt{3}\right) + \left(3\operatorname{tg} x + \sqrt{3}\right) = 0$$

$$\left(3\operatorname{tg} x + \sqrt{3}\right)(2\cos x + 1) = 0$$

Otrzymane równanie jest równoważne alternatywie równań:

$$3\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0 \quad \text{lub} \quad 2\cos x + 1 = 0$$

Stąd

$$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{lub} \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Żadna z otrzymanych liczb nie jest postaci $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Rozwiązaniami równania są liczby postaci: $-\frac{\pi}{6} + k\pi$ oraz $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, oraz $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 6. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.R1) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

Zasady oceniania

4 pkt – wyznaczenie miar pozostałych kątów trójkąta ABC.

3 pkt – obliczenie miary kąta γ: $\gamma = 60°$.

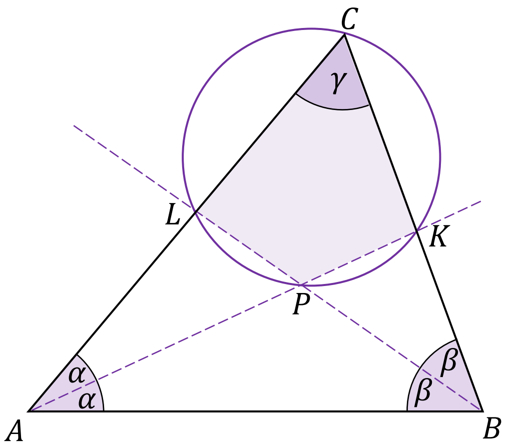
2 pkt – zastosowanie twierdzenia o kątach wierzchołkowych i zapisanie zależności
$\gamma = \alpha + \beta$.

1 pkt – zastosowanie twierdzenia o okręgu opisanym na czworokącie i zapisanie zależności
$|\sphericalangle LPK| = 180° - \gamma$
ALBO
zastosowanie twierdzenia o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta i zapisanie zależności $|\sphericalangle APB| = 180° - \alpha - \beta$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Ponieważ na czworokącie $CLPK$ można opisać okrąg, więc $|\sphericalangle LPK| = 180° - \gamma$.
Z własności kątów wierzchołkowych

$$|\sphericalangle LPK| = |\sphericalangle APB| = 180° - \alpha - \beta$$

Zatem

$$180° - \gamma = 180° - \alpha - \beta$$

Stąd

$$\gamma = \alpha + \beta$$

Korzystamy z twierdzenia o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta i otrzymujemy:

$$\gamma + 2\alpha + 2\beta = 180°$$

$$\gamma + 2(\alpha + \beta) = 180°$$

$$3\gamma = 180°$$

$$\gamma = 60°$$

Analogicznie, ponieważ na czworokącie $BKPM$ można opisać okrąg, więc $|\sphericalangle ABC| = 60°$. Stąd

$$|\sphericalangle CAB| = 180° - |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle BCA| = 60°$$

Zatem trójkąt ABC jest równoboczny.
To należało wykazać.

Zadanie 7. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia. I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: XIII.R3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu; XIII.R5) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

4 pkt – wyznaczenie poziomu produkcji, przy którym przeciętny koszt produkcji jednego litra oleju jest najmniejszy oraz obliczenie najmniejszego przeciętnego kosztu produkcji: $x = 15$ oraz $K(15) = 38{,}50$ zł.

3 pkt – zbadanie znaku pochodnej funkcji K: $K'(x) < 0$ dla $x \in [0, 15)$ oraz $K'(x) > 0$ dla $x \in (15, 50]$, oraz wyznaczenie (z uzasadnieniem) wartości zmiennej x, dla której funkcja K osiąga wartość najmniejszą, np.: funkcja K (określona na przedziale $[0, 50]$) jest malejąca w przedziale $[0,15]$ oraz rosnąca w przedziale $[15, 50]$, więc w punkcie $x = 15$ osiąga najmniejszą wartość.

2 pkt – obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji K: $x = 15$.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji K:

$$K'(x) = \frac{(44x - 621{,}5)(480 + x) - 1 \cdot (22x^2 - 621{,}5x + 23\,430)}{(480 + x)^2}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku, np. znakami „+” i „-”, znak pochodnej.
2. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja K posiada wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości x, przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający:
   – opisuje (słownie lub graficznie, np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji K
   lub
   – zapisuje, że dla wyznaczonej wartości x funkcja K ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość w przyjętej dziedzinie.

Jeśli zdający nie przedstawi takiego uzasadnienia, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

3. Jeśli zdający uzasadnia istnienie najmniejszej wartości funkcji K w zbiorze $\mathbb{R}$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy pochodną funkcji $K(x) = \frac{22x^2 - 621{,}5x + 23\,430}{480 + x}$:

$$K'(x) = \frac{(44x - 621{,}5)(480 + x) - 1 \cdot (22x^2 - 621{,}5x + 23\,430)}{(480 + x)^2}$$

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej:

$$K'(x) = 0$$

$$\frac{22x^2 + 44 \cdot 480x - 321\,750}{(480 + x)^2} = 0$$

$$22x^2 + 44 \cdot 480x - 321\,750 = 0$$

$$x^2 + 960x - 14\,625 = 0$$

$$x = -975 \notin [0, 50] \quad \text{lub} \quad x = 15 \in [0, 50]$$

Ponieważ $K'(x) < 0$ dla $x \in [0, 15)$ oraz $K'(x) > 0$ dla $x \in (15, 50]$, więc funkcja K (określona na przedziale $[0, 50]$) jest malejąca w przedziale $[0, 15]$ oraz rosnąca w przedziale $[15, 50]$. Stąd funkcja K osiąga wartość najmniejszą dla argumentu $x = 15$.

Przeciętny koszt wytworzenia jednego litra oleju jest najmniejszy przy poziomie produkcji 495 litrów dziennie.

Obliczamy najmniejszy przeciętny koszt wytworzenia jednego litra oleju:

$$K(15) = \frac{22 \cdot 15^2 - 621{,}5 \cdot 15 + 23\,430}{480 + 15} = 38{,}50 \text{ zł}$$

Zadanie 8. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.R2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż $\frac{(x+1)}{x(x-1)}+\frac{1}{x+1}\geq\frac{2x}{(x-1)(x+1)}$.

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody rozwiązania nierówności wymiernej oraz poprawny wynik: $[-3,-2)\cup\left(2,\frac{5}{2}\right]$.

4 pkt – wyznaczenie dziedziny nierówności: $R\setminus\{-2,2\}$ oraz zapisanie nierówności w postaci $\frac{-2(x-\frac{5}{2})(x+3)}{(x-2)(x+2)}\geq 0$

ALBO

rozwiązanie nierówności wielomianowej $-2\left(x-\frac{5}{2}\right)(x+3)(x-2)(x+2)\geq 0$: $[-3,-2]\cup\left[2,\ \frac{5}{2}\right]$.

3 pkt – wyznaczenie dziedziny nierówności: $R\setminus\{-2,2\}$ oraz zapisanie nierówności w postaci $\frac{-2x^2-x+15}{(x-2)(x+2)}\geq 0$

ALBO

zapisanie nierówności w postaci $\frac{-2(x-\frac{5}{2})(x+3)}{(x-2)(x+2)}\geq 0$.

2 pkt – wyznaczenie dziedziny nierówności: $R\setminus\{-2,2\}$ oraz zapisanie nierówności w postaci $\frac{x-1+x+2}{(x-2)(x+2)}\geq\frac{2x+7}{2+x}$

ALBO

zapisanie nierówności w postaci $\frac{-2x^2-x+15}{(x-2)(x+2)}\geq 0$.

1 pkt – wyznaczenie dziedziny nierówności: $R\setminus\{-2,2\}$

ALBO

zapisanie nierówności w postaci $\frac{x-1+x+2}{(x-2)(x+2)}\geq\frac{2x+7}{2+x}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy dziedzinę nierówności $\frac{x-1}{x^2-4}-\frac{1}{2-x}\geq\frac{3}{2+x}+2$:

$$x^2-4\neq 0 \quad \text{i} \quad 2-x\neq 0 \quad \text{i} \quad 2+x\neq 0$$

Zatem nierówność ma sens liczbowy dla $x\in R\setminus\{-2,2\}$.

Przekształcamy kolejno nierówność, otrzymując:

$$\frac{x-1+x+2}{(x-2)(x+2)} \geq \frac{2x+7}{2+x}$$

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x+2)} \geq \frac{(2x+7)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x+2)} - \frac{(2x+7)(x-2)}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x+2)} - \frac{2x^2+3x-14}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{-2x^2-x+15}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{-2\left(x-\frac{5}{2}\right)(x+3)}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

Ponieważ znak wyrażenia wymiernego $\frac{-2(x-\frac{5}{2})(x+3)}{(x-2)(x+2)}$ jest taki sam, jak wyrażenia będącego iloczynem licznika i mianownika tego ułamka algebraicznego, więc

$$-2\left(x-\frac{5}{2}\right)(x+3)(x-2)(x+2) \geq 0$$

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności wielomianowej $-2\left(x-\frac{5}{2}\right)(x+3)(x-2)(x+2) \geq 0$ jest zbiór $[-3,-2] \cup \left[2,\ \frac{5}{2}\right]$.

Uwzględniamy dziedzinę nierówności wymiernej i otrzymujemy zbiór wszystkich rozwiązań nierówności wymiernej: $[-3,-2) \cup \left(2, \frac{5}{2}\right]$.

Zadanie 9. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: III.R3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych; III.R5) analizuje równania i nierówności […] kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: $m \in \left(\frac{20}{7}, 4\right)$.

4 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in \left(\frac{8}{3}, 4\right)$ oraz zapisanie nierówności z jedną niewiadomą m (wynikającej z warunku $x_1^3 + x_2^3 < 5x_1^2x_2 + 5x_1x_2^2$) w postaci $-7m^3 + 76m^2 - 272m + 320 < 0$ lub

$(m-4)(-7m^2 + 48m - 80) < 0$, lub $-7(m-4)^2(m - \frac{20}{7}) < 0$

ALBO

poprawne rozwiązanie nierówności z jedną niewiadomą m (wynikającej z warunku $x_1^3 + x_2^3 < 5x_1^2x_2 + 5x_1x_2^2$): $m \in \left(\frac{20}{7}, 4\right) \cup (4, +\infty)$.

3 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in \left(\frac{8}{3}, 4\right)$ oraz zapisanie nierówności z jedną niewiadomą m, która wynika z warunku $x_1^3 + x_2^3 < 5x_1^2x_2 + 5x_1x_2^2$, np.

$(m-4)[(m-4)^2 - 3(m^2 - 7m + 12)] < 5(m^2 - 7m + 12)(m-4)$

ALBO

zapisanie nierówności z jedną niewiadomą m (wynikającej z warunku $x_1^3 + x_2^3 < 5x_1^2x_2 + 5x_1x_2^2$) w postaci $-7m^3 + 76m^2 - 272m + 320 < 0$ lub

$(m-4)(-7m^2 + 48m - 80) < 0$, lub $-7(m-4)^2(m - \frac{20}{7}) < 0$.

2 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in \left(\frac{8}{3}, 4\right)$ oraz przekształcenie warunku $x_1^3 + x_2^3 < 5x_1^2x_2 + 5x_1x_2^2$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, np.

$(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] < 5x_1x_2(x_1 + x_2)$

ALBO

zastosowanie wzorów Viète'a i zapisanie nierówności z jedną niewiadomą m, która wynika z warunku $x_1^3 + x_2^3 < 5x_1^2x_2 + 5x_1x_2^2$, np.

$(m-4)[(m-4)^2 - 3(m^2 - 7m + 12)] < 5(m^2 - 7m + 12)(m-4)$.

1 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in \left(\frac{8}{3}, 4\right)$

ALBO
przekształcenie warunku $x_1^3 + x_2^3 < 5x_1^2x_2 + 5x_1x_2^2$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, np.
$(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] < 5x_1x_2(x_1 + x_2)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Trójmian $x^2 - (m-4)x + m^2 - 7m + 12$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste tylko wtedy, gdy jego wyróżnik Δ jest dodatni, tj.

$$(m-4)^2 - 4(m^2 - 7m + 12) > 0$$

$$-3m^2 + 20m - 32 > 0$$

$$-3(m-4)\left(m - \frac{8}{3}\right) > 0$$

Zatem $m \in \left(\frac{8}{3}, 4\right)$.

Nierówność $x_1^3 + x_2^3 < 5x_1^2x_2 + 5x_1x_2^2$ przekształcamy równoważnie do postaci, która pozwoli na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a:

$$x_1^3 + x_2^3 < 5x_1^2x_2 + 5x_1x_2^2$$

$$(x_1 + x_2)[x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2] < 5x_1x_2(x_1 + x_2)$$

$$(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] < 5x_1x_2(x_1 + x_2)$$

Stosujemy wzory Viète'a i otrzymujemy:

$$(m-4)[(m-4)^2 - 3(m^2 - 7m + 12)] < 5(m^2 - 7m + 12)(m-4)$$

$$(m-4)[(m-4)^2 - 8(m^2 - 7m + 12)] < 0$$

$$(m-4)(-7m^2 + 48m - 80) < 0$$

$$-7(m-4)^2(m - \frac{20}{7}) < 0$$

$$m \in \left(\frac{20}{7}, 4\right) \cup (4, +\infty)$$

Częścią wspólną zbiorów $\left(\frac{8}{3}, 4\right)$ i $\left(\frac{20}{7}, 4\right) \cup (4, +\infty)$ jest $\left(\frac{20}{7}, 4\right)$.

Równanie $x^2 - (m-4)x + m^2 - 7m + 12 = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste, spełniające warunki zadania, dla $m \in \left(\frac{20}{7}, 4\right)$.

Zadanie 10. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.R5) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $P_{\text{przekroju}} = \frac{27\sqrt{10}}{100}a^2$.

4 pkt – obliczenie wysokości h oraz długości podstawy EF trapezu $BCFE$: $h = \frac{3\sqrt{10}}{10}a$ oraz $|EF| = 0{,}8a$.

3 pkt – obliczenie długości podstawy EF trapezu $BCFE$: $|EF| = 0{,}8a$

ALBO

obliczenie wysokości h trapezu $BCFE$: $h = \frac{3\sqrt{10}}{10}a$.

2 pkt – zapisanie zależności prowadzącej do obliczenia długości podstawy EF trapezu, np. $\frac{|EF|}{|AD|} = \frac{|RS|}{|SG|}$

ALBO

obliczenie $|SG| = \frac{\sqrt{10}}{2}a$ oraz $|RS| = \frac{2\sqrt{10}}{5}a$,

ALBO

zapisanie zależności prowadzącej do obliczenia wysokości h trapezu $BCFE$, np. $\frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{h}{a}$.

1 pkt – zapisanie, że przekrój jest trapezem (równoramiennym).

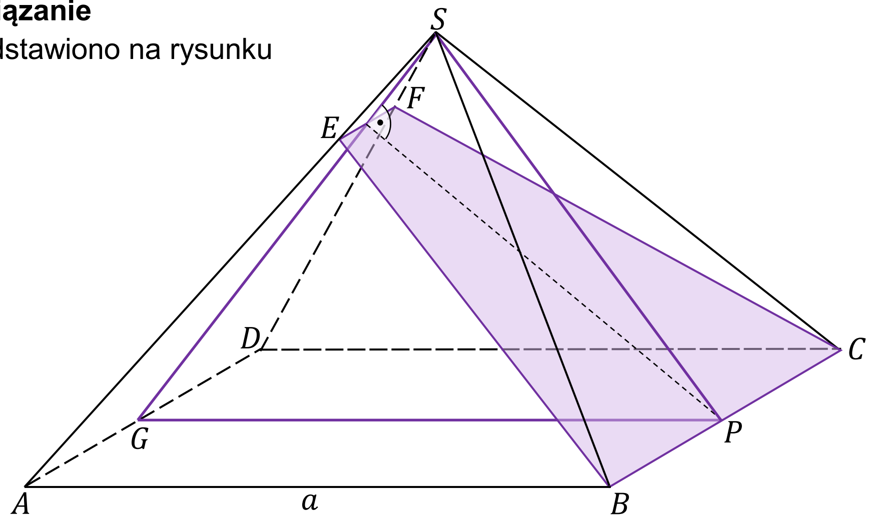
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga.

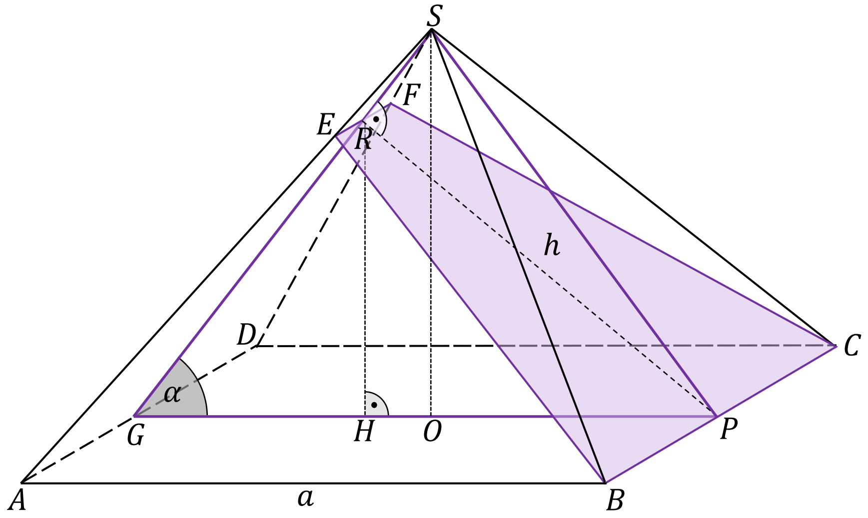
Jeśli zdający nie zapisze, że przekrój jest trapezem, lecz realizuje strategię rozwiązania zadania, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Odpowiedni przekrój przedstawiono na rysunku obok.



P i G – środki krawędzi, odpowiednio, BC i AD.
$E \in AS$ i $F \in DS$, i $EF \parallel AD$. Podstawa $ABCD$ jest kwadratem o boku a. Krawędzie boczne są równej długości.
Otrzymany przekrój $BCFE$ jest trapezem równoramiennym.
Wprowadzamy oznaczenia:
O – punkt przecięcia przekątnych podstawy $ABCD$,
R – środek odcinka EF,
H – rzut prostokątny punktu R na płaszczyznę podstawy $ABCD$,
h – wysokość trapezu $BCFE$.



Trójkąt SOG jest prostokątny, więc z definicji funkcji cosinus otrzymujemy

$$\cos\alpha = \frac{|OG|}{|SG|}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{\frac{1}{2}a}{|SG|}$$

Stąd wysokość ściany bocznej ostrosłupa jest równa $|SG| = \frac{\sqrt{10}}{2}a$.
Trójkąt GPR jest prostokątny, więc z definicji funkcji cosinus otrzymujemy

$$\cos\alpha = \frac{|RG|}{|GP|}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{|RG|}{a}$$

$$|RG| = \frac{\sqrt{10}}{10}a$$

Obliczamy długość odcinka RS:

$$|RS| = |SG| - |RG|$$

$$|RS| = \frac{\sqrt{10}}{2}a - \frac{\sqrt{10}}{10}a$$

$$|RS| = \frac{2\sqrt{10}}{5}a$$

Trójkąty ADS i EFS na mocy cechy *kkk* są podobne, więc

$$\frac{|EF|}{|AD|} = \frac{|RS|}{|SG|}$$

Stąd wyznaczamy długość podstawy EF trapezu $BCFE$:

$$\frac{|EF|}{a} = \frac{\frac{2\sqrt{10}}{5}a}{\frac{\sqrt{10}}{2}a}$$

$$|EF| = 0{,}8a$$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i obliczamy $\sin\alpha$:

$$\sin^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2 = 1$$

$$\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Trójkąt GRP jest prostokątny. Korzystamy z definicji funkcji sinus i obliczamy wysokość h przekroju:

$$\sin\alpha = \frac{|RP|}{|GP|}$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{a}$$

$$\frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{h}{a}$$

$$h = \frac{3\sqrt{10}}{10}a$$

Obliczamy pole przekroju: $P_{\text{przekroju}} = \frac{a+0{,}8a}{2} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10}a = 0{,}9a \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10}a = \frac{27\sqrt{10}}{100}a^2$.

Zadanie 11. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R7) stosuje twierdzenie sinusów; VII.R5) korzysta ze wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych.

Zasady oceniania

5 pkt – obliczenie pola P i obwodu L trapezu i poprawne wyniki: $P = \frac{27648}{625}$, $L = 27{,}36$.

4 pkt – obliczenie długości dłuższej podstawy oraz obliczenie wysokości trapezu: $a = \frac{234}{25}$, $h = \frac{144}{25}$

ALBO

obliczenie długości dłuższej i krótszej podstawy: $a = \frac{234}{25}$ oraz $b = 6$,

ALBO

obliczenie pola P trapezu: $P = \frac{27648}{625}$,

ALBO

obliczenie obwodu L trapezu: $L = 27{,}36$.

3 pkt – obliczenie długości dłuższej podstawy: $a = \frac{234}{25}$

ALBO

obliczenie wysokości trapezu oraz obliczenie długości odcinka EB: $h = \frac{144}{25}$ oraz $|EB| = \frac{42}{25}$,

ALBO

obliczenie długości odcinka AE: $|AE| = \frac{192}{25}$.

2 pkt – obliczenie sinusa kąta ACB: $\sin(\alpha + \beta) = \frac{117}{125}$

ALBO

obliczenie wysokości trapezu: $h = \frac{144}{25}$,

ALBO

obliczenie długości odcinka EB: $|EB| = \frac{42}{25}$,

ALBO

obliczenie długości odcinka AC: $|AC| = \frac{48}{5}$.

1 pkt – obliczenie sinusa kąta BAC: $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

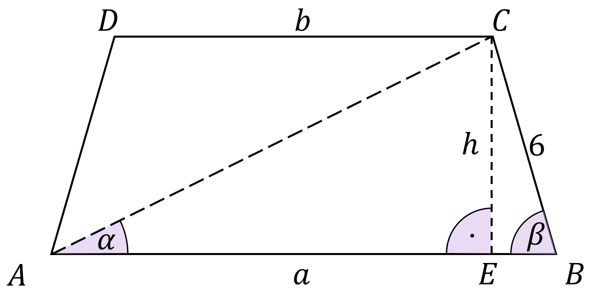
Przyjmijmy oznaczenia:

a – długość dłuższej podstawy trapezu,

b – długość krótszej podstawy trapezu,

$|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$,

CE – wysokość poprowadzona z wierzchołka C trapezu na podstawę AB.



Ponieważ na trapezie $ABCD$ opisano okrąg, więc trapez jest równoramienny. Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy promieniowi okręgu opisanego na trapezie $ABCD$. Ponieważ $|AB| > |CD|$, więc $\alpha < 90°$ i $\beta < 90°$.

Stosujemy twierdzenie sinusów w trójkącie ABC i obliczamy sinus kąta α:

$$\frac{|BC|}{\sin\alpha} = 2R$$

$$\frac{6}{\sin\alpha} = 10$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}$$

Korzystając z jedynki trygonometrycznej, otrzymujemy $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

Obliczamy sinus kąta β.

Ponieważ $\frac{\sin|\sphericalangle BAC|}{\sin|\sphericalangle ABC|} = \frac{5}{8}$, więc

$$\sin\beta = \frac{8}{5}\cdot\sin\alpha$$

$$\sin\beta = \frac{8}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

Korzystając z jedynki trygonometrycznej, otrzymujemy $\cos\beta = \frac{7}{25}$.

Obliczamy sinus kąta $(\alpha+\beta)$, korzystając ze wzoru na sinus sumy kątów:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{3}{5}\cdot\frac{7}{25} + \frac{4}{5}\cdot\frac{24}{25} = \frac{117}{125}$$

Stosujemy twierdzenie sinusów do trójkąta ABC i obliczamy długość dłuższej podstawy trapezu:

$$\frac{a}{\sin[180° - (\alpha+\beta)]} = 2\mathrm{R}$$

$$\frac{a}{\sin(\alpha+\beta)} = 10$$

$$\frac{a}{\frac{117}{125}} = 10$$

$$a = \frac{234}{25}$$

Trójkąt BEC jest prostokątny. Obliczamy wysokość h trapezu, długość odcinka EB oraz długość krótszej podstawy trapezu:

$$\frac{h}{|BC|} = \sin\beta \quad \text{oraz} \quad \frac{|EB|}{|BC|} = \cos\beta$$

$$\frac{h}{6} = \frac{24}{25} \quad \text{oraz} \quad \frac{|EB|}{6} = \frac{7}{25}$$

$$h = \frac{144}{25} \quad \text{oraz} \quad |EB| = \frac{42}{25}$$

$$b = a - 2\cdot|EB|$$

$$b = \frac{234}{25} - 2\cdot\frac{42}{25} = 6$$

Obliczamy pole P i obwód L trapezu:

$$P = \frac{\frac{234}{25}+6}{2}\cdot\frac{144}{25} = \frac{27648}{625}$$

$$L = 3\cdot 6 + \frac{234}{25} = 27{,}36$$

Zadanie 12. (0–6)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.R1) posługuje się równaniem prostej w postaci ogólnej na płaszczyźnie […]; IX.R3) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej.

Zasady oceniania

6 pkt – obliczenie odległości h_C punktu C od prostej k oraz pola P trójkąta ABC:

$h_C = \frac{9}{\sqrt{2}}$ i $P = 54.$

5 pkt – obliczenie pola P trójkąta ABC: $P = 54$

ALBO

obliczenie odległości h_C punktu C od prostej k oraz obliczenie współrzędnych punktów A i B: $h_C = \frac{9}{\sqrt{2}}$ oraz $A = (7, 2)$ i $B = (-5, 14).$

4 pkt – obliczenie współrzędnych punktów A, B oraz C: $A = (7, 2), B = (-5, 14)$ i $C = (1, -1)$

ALBO

obliczenie odległości h_C punktu C od prostej k oraz zapisanie układu równań prowadzącego do obliczenia współrzędnych punktów A i B:

$h_C = \frac{9}{\sqrt{2}}$ oraz $\begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \end{cases}$

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktów A i B oraz wyznaczenie pochodnej funkcji $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$: $A = (7, 2)$ i $B = (-5, 14)$ oraz $y' = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

ALBO

obliczenie współrzędnych punktu C oraz zapisanie układu równań prowadzącego do obliczenia współrzędnych punktów A i B: $C = (1, -1)$ oraz $\begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \end{cases}$

ALBO

obliczenie odległości h_C punktu C od prostej k: $h_C = \frac{9}{\sqrt{2}}$.

2 pkt – obliczenie współrzędnych punktów A i B: $A = (7, 2)$ i $B = (-5, 14)$

ALBO

obliczenie współrzędnych punktu C: $C = (1, -1)$,

ALBO

zapisanie układu równań prowadzącego do obliczenia współrzędnych punktów A i B oraz wyznaczenie pochodnej funkcji $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$:

$\begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \end{cases}$ oraz $y' = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

1 pkt – zapisanie układu równań prowadzącego do obliczenia współrzędnych punktów A i B:

$$\begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \end{cases}$$

ALBO

wyznaczenie pochodnej funkcji $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$: $y' = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapisujemy układ równań prowadzący do obliczenia współrzędnych punktów A i B.

$$\begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $y = -x + 9$ i podstawiamy wyrażenie $-x + 9$ w miejsce y do drugiego równania, otrzymując:

$$-x + 9 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$$

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$x = -5 \quad \text{lub} \quad x = 7$$

Dla $x = -5$ otrzymujemy $y = 14$, więc $B = (-5, 14)$.
Dla $x = 7$ otrzymujemy $y = 2$, więc $A = (7, 2)$.

Oznaczmy pierwszą współrzędną punktu C przez x_C. Prosta l jest równoległa do prostej k, więc współczynnik kierunkowy obu prostych jest równy (-1). Prosta l jest styczna do paraboli w punkcie C, więc współczynnik kierunkowy prostej l jest równy pochodnej funkcji $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$ w punkcie $x = x_C$. Zatem

$$y' = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad \text{i} \quad y'(x_C) = -1$$

$$\frac{1}{2}x_C - \frac{3}{2} = -1$$

$$x_C = 1$$

czyli $C = (1, -1)$.

Obliczamy wysokość h_C trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C na podstawę AB (wysokość ta jest równa odległości punktu C od prostej k):

$$h_C = \frac{|1 + (-1) - 9|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

Obliczamy długość boku AB: $|AB| = \sqrt{(-5 - 7)^2 + (14 - 2)^2} = 12\sqrt{2}$.

Obliczamy pole P trójkąta ABC: $P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h_C = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2} \cdot \frac{9}{\sqrt{2}} = 54$.

Uwaga.
Pole P trójkąta ABC można również obliczyć ze wzoru

$$P = \frac{1}{2} \cdot |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$$

Wówczas otrzymujemy

$$P = \frac{1}{2} \cdot |(-5 - 7)(-1 - 2) - (14 - 2)(1 - 7)| = \frac{1}{2} \cdot |36 - (-72)| = 54$$