

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny Arkusz pokazowy
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom rozszerzony
<i>Formy arkusza:</i>	MMAP-R0-100, MMAP-R0-200, MMAP-R0-300, MMAP-R0-400, MMAP-R0-660, MMAP-R0-700, MMAP-R0-Q00
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	4 marca 2022 r.

Uwaga: Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024 ¹	
Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.</p> <p>III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</p> <p>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.</p>	<p>Zdający:</p> <p>I.1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;</p> <p>I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.</p> <p>I.1) (R) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.</p>

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie ciągu poprawnych przekształceń i wyrażenie $\log_4 49$ za pomocą danych liczb a oraz b : $\log_4 49 = a \cdot b$.

2 pkt – zastosowanie do $\log_3 4$ wzoru na zamianę podstawy logarytmu i przekształcenie $\log_3 4$ do postaci $\log_3 4 = \frac{2}{\log_2 3}$.

1 pkt – zastosowanie wzoru na zamianę podstawy logarytmu i zapisanie $\log_4 49$ za pomocą logarytmów o podstawie 3 z liczb naturalnych, np. $\log_4 49 = \frac{\log_3 49}{\log_3 4}$,

$$\log_4 49 = 2 \cdot \frac{\log_3 7}{\log_3 4}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy $\log_4 49$, stosując wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu, i otrzymujemy

¹ Komunikat o wymaganiach egzaminacyjnych obowiązujących w roku 2023 i 2024, <https://www.gov.pl/web/edukacja-i-nauka/wymagania-egzaminacyjne-obowiazujace-na-egzaminie-maturalnym-w-roku-2023-i-2024>

$$\log_4 49 = 2 \cdot \log_4 7 = 2 \cdot \frac{\log_3 7}{\log_3 4} = 2 \cdot \frac{\log_3 7}{\frac{\log_2 4}{\log_2 3}} = 2 \cdot \log_3 7 \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 4} = 2 \cdot \log_3 7 \cdot \frac{\log_2 3}{2}$$

Zatem

$$\log_4 49 = 2 \cdot b \cdot \frac{a}{2} = a \cdot b$$

Odp. $\log_4 49 = a \cdot b$.

Zadanie 2. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XIII.2) (R) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną pochodnej; XIII.3) (R) oblicza pochodną funkcji o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda wyznaczenia równania stycznej do wykresu funkcji f w punkcie

$$P = (-3, -3) \text{ i podanie prawidłowego wyniku: } y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}.$$

2 pkt – podanie poprawnej interpretacji liczby $f'(-3)$ jako współczynnika kierunkowego

$$\text{stycznej i obliczenie } f'(-3): f'(-3) = \frac{3}{4}.$$

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji $f: f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$ dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy pochodną funkcji f :

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - (x^2+3) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy szukanej stycznej:

$$f'(-3) = \frac{(-3)^2 - 2 \cdot (-3) - 3}{(-3-1)^2} = \frac{9+6-3}{16} = \frac{3}{4}$$

Zatem równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $P = (-3, -3)$ ma postać:

$$y = \frac{3}{4}x + b$$

Obliczamy współczynnik b . Ponieważ punkt P leży na prostej stycznej, więc

$$-3 = \frac{3}{4} \cdot (-3) + b. \text{ Stąd } b = -\frac{3}{4}.$$

Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $P = (-3, -3)$ ma postać $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$.

Zadanie 3. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.5) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. VI.2) (R) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda wyznaczenia ilorazu ciągu i poprawna metoda rozwiązania

nierówności $\left| \frac{S-S_n}{S_n} \right| < 0,001$ w zbiorze liczb naturalnych dodatnich oraz poprawny wynik: $n > 9$.

3 pkt – zapisanie, że $1 - q^n > 0$ (albo $0 < 1 - q^n < 1$) i przekształcenie nierówności

$\left| \frac{S-S_n}{S_n} \right| < 0,001$ do postaci nierówności wymiernej z niewiadomą t ($t = q^n$), np.

$$\frac{t}{1-t} < 0,001, \frac{q^n}{1-q^n} < 0,001$$

LUB

przekształcenie nierówności $\left| \frac{S-S_n}{S_n} \right| < 0,001$ do koniunkcji dwóch nierówności

wymiernych z niewiadomą t ($t = q^n$), np. $\frac{t}{1-t} > -0,001$ i

$\frac{t}{1-t} < 0,001$ (albo: $\frac{q^n}{1-q^n} < 0,001$ i $\frac{q^n}{1-q^n} > -0,001$), i zapisanie, że nierówność

$\frac{t}{1-t} > -0,001$ jest spełniona dla każdej liczby $t \in (0, 1)$ (analogicznie: zapisanie,

że nierówność $\frac{q^n}{1-q^n} > -0,001$ jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej dodatniej n).

2 pkt – obliczenie ilorazu q ciągu (a_n) : $q = \frac{1}{2}$.

1 pkt – skorzystanie ze wzorów na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego oraz sumę wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i zapisanie równania

$$a_1 + a_2 + a_3 = S \cdot (1 - q^3)$$

LUB

zapisanie dwóch równań z niewiadomymi a_1 oraz q , wynikających z treści zadania,

$$\text{np. } a_1 \cdot (1 + q + q^2) = 7 \text{ i } 8 = \frac{a_1}{1-q}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ponieważ suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) istnieje i jest różna od zera, więc $a_1 \neq 0$ i iloraz q tego ciągu spełnia warunek $|q| < 1$.

Korzystamy ze wzorów na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego oraz na sumę wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i obliczamy iloraz q ciągu (a_n) :

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1 \cdot \frac{1 - q^3}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} \cdot (1 - q^3) = S \cdot (1 - q^3)$$

$$7 = 8(1 - q^3)$$

$$q = \frac{1}{2}$$

Zatem $S = a_1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2a_1$ i $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2a_1 \cdot [1 - (\frac{1}{2})^n]$. Stąd, wobec $a_1 \neq 0$,

otrzymujemy $\frac{S - S_n}{S_n} = \frac{2a_1 - 2a_1 \cdot [1 - (\frac{1}{2})^n]}{2a_1 \cdot [1 - (\frac{1}{2})^n]} = \frac{2a_1 \cdot (\frac{1}{2})^n}{2a_1 \cdot [1 - (\frac{1}{2})^n]} = \frac{(\frac{1}{2})^n}{1 - (\frac{1}{2})^n}$.

Rozwiązujemy nierówność $\left| \frac{S - S_n}{S_n} \right| < 0,001$ w zbiorze liczb całkowitych dodatnich:

$$\left| \frac{S - S_n}{S_n} \right| < 0,001$$

$$\left| \frac{(\frac{1}{2})^n}{1 - (\frac{1}{2})^n} \right| < 0,001$$

Ponieważ $q = \frac{1}{2} \in (0, 1)$, więc $1 - (\frac{1}{2})^n > 0$. Zatem nierówność $\left| \frac{(\frac{1}{2})^n}{1 - (\frac{1}{2})^n} \right| < 0,001$

możemy przekształcić do postaci $\frac{(\frac{1}{2})^n}{1 - (\frac{1}{2})^n} < 0,001$. Stąd otrzymujemy dalej

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,001 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \quad / \cdot 2^n$$

$$1 < 0,001(2^n - 1)$$

$$2^n > 1001$$

Ponieważ $2^9 = 512$ i $2^{10} = 1024$, więc $n > 9$.

Rozwiązaniem nierówności $\left| \frac{S - S_n}{S_n} \right| < 0,001$ w zbiorze liczb całkowitych dodatnich są wszystkie liczby naturalne większe od 9.

Zadanie 4. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania [...].	Zdający: III.3) (R) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych; III.5) (R) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żadaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Zasady oceniania

5 pkt – wyznaczenie części wspólnej rozwiązań warunków (W1)–(W5) i podanie poprawnego

$$\text{wyniku: } m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (2, 11) \cup (11, +\infty).$$

4 pkt – zapisanie, że dla $m = 2$ warunki zadania nie są spełnione oraz rozwiązanie warunków (W1)–(W5):

$$(W1) \quad m \neq 2$$

$$(W2) \quad m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (-2, +\infty)$$

$$(W3) \quad m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

$$(W4) \quad m \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$$

$$(W5) \quad m \neq 11.$$

3 pkt – rozwiązanie warunków (W2)–(W4):

$$(W2) \quad m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (-2, +\infty)$$

$$(W3) \quad m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

$$(W4) \quad m \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty).$$

2 pkt – zapisanie, że dla $m = 2$ warunki zadania nie są spełnione oraz zapisanie warunków koniecznych i dostatecznych na to, aby równanie (2) było równaniem kwadratowym, które ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste dodatnie różne od liczby 6: $m - 2 \neq 0$ i $\Delta > 0$ i $x_1 \cdot x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 > 0$ i $(m - 2) \cdot 6^2 - 4 \cdot (m + 3) \cdot 6 + m + 1 \neq 0$
LUB

zapisanie, że dla $m = 2$ warunki zadania nie są spełnione oraz zapisanie warunków

$$x_1 \cdot x_2 > 0 \text{ i } x_1 + x_2 > 0 \text{ w zależności od parametru } m: \frac{m+1}{m-2} > 0$$

$$\text{i } -\frac{4(m+3)}{m-2} > 0$$

LUB

zapisanie, że dla $m = 2$ warunki zadania nie są spełnione oraz wyznaczenie tych wszystkich wartości parametru m , dla których wyróżnik Δ trójmianu

$$(m - 2)x^2 - 4(m + 3)x + m + 1 = 0 \text{ jest dodatni.}$$

1 pkt – zapisanie, że równanie (1) ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste tego samego znaku tylko wtedy, gdy równanie (2) ma dwa różne rozwiązania dodatnie różne od liczby 6.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zauważmy, że jednym z rozwiązań równania

$$(x - 6) \cdot [(m - 2)x^2 - 4(m + 3)x + m + 1] = 0 \quad (1)$$

jest liczba 6. Zatem równanie (1) ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste tego samego znaku wtedy i tylko wtedy, gdy równanie

$$(m - 2)x^2 - 4(m + 3)x + m + 1 = 0 \quad (2)$$

ma dokładnie dwa różne rozwiązania dodatnie x_1, x_2 takie, że $x_1 \neq 6$ i $x_2 \neq 6$.

Dla $m = 2$ równanie (2) przyjmuje postać $-20x + 3 = 0$ i ma tylko jedno rozwiązanie.

Pozostaje wyznaczyć te wartości parametru m , dla których warunki zadania są spełnione, a równanie (2) jest kwadratowe, tj. wyznaczyć te wartości parametru, dla których spełnione są jednocześnie następujące warunki:

$$(W1) \quad m - 2 \neq 0$$

$$(W2) \quad \Delta > 0$$

$$(W3) \quad x_1 \cdot x_2 > 0$$

$$(W4) \quad x_1 + x_2 > 0$$

$$(W5) \quad (m - 2) \cdot 6^2 - 4 \cdot (m + 3) \cdot 6 + m + 1 \neq 0$$

Rozwiązaniem warunku (W1) jest $m \neq 2$.

Rozwiązujemy nierówność $\Delta > 0$:

$$[-4(m + 3)]^2 - 4 \cdot (m - 2) \cdot (m + 1) > 0$$

$$16m^2 + 96m + 144 - 4m^2 + 4m + 8 = 0$$

$$12m^2 + 100m + 152 > 0$$

$$m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (-2, +\infty)$$

Korzystając ze wzorów Viète'a, rozwiązujemy warunek (W3):

$$x_1 \cdot x_2 > 0$$

$$\frac{m + 1}{m - 2} > 0$$

$$(m + 1)(m - 2) > 0 \wedge m \neq 2$$

$$m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

Korzystając ze wzorów Viète'a, rozwiązujemy warunek (W4):

$$x_1 + x_2 > 0$$

$$-\frac{-4(m+3)}{m-2} > 0$$

$$(m+3)(m-2) > 0 \wedge m \neq 2$$

$$m \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$$

Rozwiązujemy warunek (W5):

$$(m-2) \cdot 6^2 - 4 \cdot (m+3) \cdot 6 + m + 1 \neq 0$$

$$13m - 143 \neq 0$$

$$m \neq 11$$

Wyznaczamy część wspólną rozwiązań warunków (W1)–(W5) i otrzymujemy

$$m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (2, 11) \cup (11, +\infty).$$

Równanie (1) ma trzy różne rozwiązania tego samego znaku dla

$$m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (2, 11) \cup (11, +\infty).$$

Zadanie 5. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.2) (R) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

Zasady oceniania

dla sposobu 1.

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu.

2 pkt – przekształcenie wyrażenia $(a - 1)^3 + a^3 + (a + 1)^3$ do postaci $3a(a^2 + 2)$, gdzie a jest liczbą parzystą niepodzielną przez 4, i wykazanie, że liczba $3a(a^2 + 2)$ jest podzielna przez 4

LUB

przekształcenie wyrażenia $(a - 1)^3 + a^3 + (a + 1)^3$ do postaci $3a(a^2 + 2)$, gdzie a jest liczbą parzystą niepodzielną przez 4, i wykazanie, że liczba $3a(a^2 + 2)$ jest podzielna przez 9.

1 pkt – zapisanie sumy sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 w postaci $(a - 1)^3 + a^3 + (a + 1)^3$, gdzie a jest liczbą parzystą niepodzielną przez 4.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

dla sposobu 2.

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu.

2 pkt – przekształcenie wyrażenia $(4k + 1)^3 + (4k + 2)^3 + (4k + 3)^3$ do postaci $36 \cdot P(k) + 12 \cdot Q(k)$, gdzie P i Q są wielomianami o współczynnikach całkowitych, np. $12(16k^3 + 24k^2 + 14k + 3)$, $36(5k^3 + 8k^2 + 4k + 1) + 12k(k^2 + 2)$.

1 pkt – zapisanie sumy sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 w postaci $(4k + 1)^3 + (4k + 2)^3 + (4k + 3)^3$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Sumę sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 można zapisać w postaci $(a - 1)^3 + a^3 + (a + 1)^3$, gdzie a jest liczbą parzystą niepodzielną przez 4.

Ponieważ

$$(a - 1)^3 + a^3 + (a + 1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1 + a^3 + a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = 3a(a^2 + 2),$$

więc liczba $(a - 1)^3 + a^3 + (a + 1)^3$ jest podzielna przez 4 jako iloczyn liczby parzystej $3a$ i liczby parzystej $a^2 + 2$.

Jeżeli $a = 3k$, przy pewnym $k \in \mathbb{Z}$, to $3a(a^2 + 2) = 9k(9k^2 + 2)$ jest liczbą podzielną przez 9.

Jeżeli $a = 3k + 1$, przy pewnym $k \in \mathbb{Z}$, to $3a(a^2 + 2) = 3(3k + 1)[(3k + 1)^2 + 2] =$
 $= 3(3k + 1)(9k^2 + 6k + 3) = 9(3k + 1)(3k^2 + 2k + 1)$ jest liczbą podzielną przez 9.

Jeżeli $a = 3k + 2$, przy pewnym $k \in \mathbb{Z}$, to liczba $3a(a^2 + 2) =$
 $= 3(3k + 2)[(3k + 2)^2 + 2] = 3(3k + 2)(9k^2 + 12k + 6) = 9(3k + 2)(3k^2 + 4k + 2)$
 jest liczbą podzielną przez 9.

Zatem suma sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest podzielna przez 9.

Ponieważ suma trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest liczbą podzielną przez 4 i przez 9 oraz liczby 4 i 9 są względnie pierwsze, więc ta suma jest liczbą podzielną przez 36.

Sposób 2.

Sumę sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 można zapisać w postaci $(4k + 1)^3 + (4k + 2)^3 + (4k + 3)^3$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Ponieważ $(4k + 1)^3 + (4k + 2)^3 + (4k + 3)^3 =$
 $= 64k^3 + 48k^2 + 12k + 1 + 64k^3 + 96k^2 + 48k + 8 + 64k^3 + 144k^2 + 108k + 27 =$
 $= 192k^3 + 288k^2 + 168k + 36 = 12(16k^3 + 24k^2 + 14k + 3) =$
 $= 36(5k^3 + 8k^2 + 4k + 1) + 12k(k^2 + 2)$, więc wystarczy pokazać, że liczba $k(k^2 + 2)$
 jest podzielna przez 3 dla każdego $k \in \mathbb{Z}$.

Jeżeli $k = 3m$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$, to liczba $k(k^2 + 2) = 3m(9m^2 + 2)$ jest podzielna przez 3 jako iloczyn liczby 3 i liczby całkowitej $m(9m^2 + 2)$.

Jeżeli $k = 3m + 1$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$, to liczba $k(k^2 + 2) = (3m + 1)[(3m + 1)^2 + 2] =$
 $= (3m + 1)(9m^2 + 6m + 3) = 3(3m + 1)(3m^2 + 2m + 1)$ jest podzielna przez 3 jako iloczyn liczby 3 i liczby całkowitej $(3m + 1)(3m^2 + 2m + 1)$.

Jeżeli $k = 3m + 2$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$, to liczba $k(k^2 + 2) = (3m + 2)[(3m + 2)^2 + 2] =$
 $(3m + 2)(9m^2 + 12m + 6) = 3(3m + 2)(3m^2 + 4m + 2)$ jest podzielna przez 3 jako iloczyn liczby 3 i liczby całkowitej $(3m + 2)(3m^2 + 4m + 2)$.

Zadanie 6.1. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych; 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$. IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych.

Zasady oceniania

2 pkt – doprowadzenie wyrażenia określającego długość odcinka PR do postaci

$$\sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}.$$

1 pkt – przyjęcie $R = (x, -0,5(x - 0,5)^2 + 4)$ (lub $R = (x, g(x))$) i zastosowanie wzoru na odległość dwóch punktów do wyznaczenia długości odcinka PR :

$$|PR| = \sqrt{(x + 1)^2 + (-0,5(x - 0,5)^2 + 4 - 1)^2}$$

$$(\text{lub } |PR| = \sqrt{(x + 1)^2 + (g(x) - 1)^2}).$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ponieważ $R \in g$, więc $R = (x, -0,5(x - 0,5)^2 + 4)$. Zatem

$$|PR| = \sqrt{(x - (-1))^2 + (-0,5(x - 0,5)^2 + 4 - 1)^2}$$

Stosując wzór na kwadrat sumy dwóch wyrażen, otrzymujemy

$$|PR| = \sqrt{x^2 + 2x + 1 + (-0,5(x - 0,5)^2)^2 + 2 \cdot (-0,5)(x - 0,5)^2 \cdot 3 + 9}$$

$$|PR| = \sqrt{x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{4}\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - 3\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 9}$$

$$|PR| = \sqrt{x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{4}\left(x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) - 3x^2 + 3x - \frac{3}{4} + 9}$$

$$|PR| = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}$$

To należało pokazać.

Zadanie 6.2. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.3) (R) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym [...]; XIII.4) (R) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.5) (R) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

6 pkt – uzasadnienie, że punkt K musi należeć do wykresu funkcji g i poprawne uzasadnienie, że funkcja d przyjmuje wartość największą dla argumentu $x = \frac{3}{2}$,

obliczenie współrzędnych punktu K oraz długości $|PK|$ toru: $K = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$,

$$|PK| = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

5 pkt – uzasadnienie, że punkt K musi należeć do wykresu funkcji g i uzasadnienie, że funkcja k przyjmuje wartość największą dla argumentu $x = \frac{3}{2}$

LUB

poprawne uzasadnienie, że funkcja d przyjmuje wartość największą dla argumentu $x = \frac{3}{2}$ oraz obliczenie $g\left(\frac{3}{2}\right)$, oraz obliczenie $d\left(\frac{3}{2}\right)$: $g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}$, $d\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

4 pkt – uzasadnienie, że punkt K musi należeć do wykresu funkcji g i obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji k : $x = \frac{3}{2}$

LUB

uzasadnienie, że funkcja k przyjmuje wartość największą dla argumentu $x = \frac{3}{2}$.

3 pkt – uzasadnienie, że punkt K musi należeć do wykresu funkcji g i wyznaczenie

pochodnej funkcji k : $k'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{4}x^2 + \frac{39}{8}$ dla $x \in \left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{1+\sqrt{94}}{6}\right]$

LUB

obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji k : $x = \frac{3}{2}$.

2 pkt – uzasadnienie, że punkt K musi należeć do wykresu funkcji g i określenie dziedziny

$$\text{funkcji } d: x \in \left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{1+\sqrt{94}}{6} \right]$$

LUB

wyznaczenie pochodnej funkcji $k: k'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{4}x^2 + \frac{39}{8}$ dla

$$x \in \left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{1+\sqrt{94}}{6} \right].$$

1 pkt – uzasadnienie, że punkt K musi należeć do wykresu funkcji g

LUB

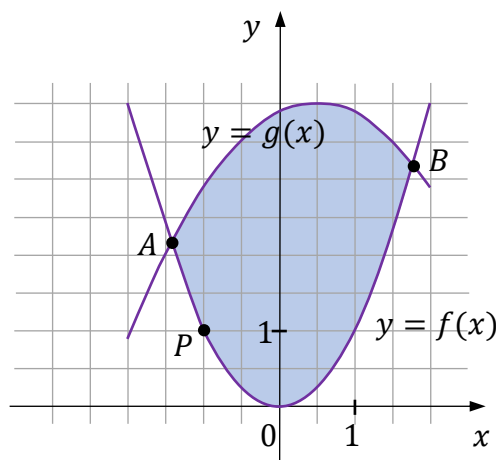
określenie dziedziny funkcji $d: x \in \left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{1+\sqrt{94}}{6} \right]$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Pokażemy najpierw, że optymalna lokalizacja końca toru regatowego musi znajdować się na linii brzegowej określonej przez funkcję g .

Niech $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ będą punktami przecięcia wykresów funkcji f i g (zobacz rysunek).



Współrzędne każdego punktu $C = (x_C, y_C)$ leżącego na fragmencie paraboli (będącej wykresem funkcji f) pomiędzy punktami A i B spełniają nierówności

$$|x_C - x_P| \leq |x_B - x_P| \quad \wedge \quad |y_C - y_P| \leq |y_B - y_P|$$

więc

$$|x_C - x_P|^2 + |y_C - y_P|^2 \leq |x_B - x_P|^2 + |y_B - y_P|^2$$

$$|PC|^2 \leq |PB|^2$$

$$|PC| \leq |PB|$$

Ponieważ $B \in g$, więc optymalna lokalizacja końca toru musi znajdować się na linii brzegowej określonej przez funkcję g .

Obliczamy pierwsze współrzędne punktów przecięcia wykresów funkcji f i g :

$$x^2 = -0,5(x - 0,5)^2 + 4$$

$$\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{31}{8} = 0$$

$$12x^2 - 4x - 31 = 0$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{94}}{6} \approx -1,45 \quad \vee \quad x = \frac{1 + \sqrt{94}}{6} \approx 1,78$$

Zatem $x_A = \frac{1 - \sqrt{94}}{6}$ oraz $x_B = \frac{1 + \sqrt{94}}{6}$.

W celu wyznaczenia punktu, w którym należy umiejscowić koniec toru, rozpatrujemy funkcję d określoną wzorem

$$d(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}$$

dla każdego $x \in \left[\frac{1 - \sqrt{94}}{6}, \frac{1 + \sqrt{94}}{6}\right]$ i szukamy argumentu, dla którego funkcja ta osiąga wartość największą.

Funkcja d określa odległość punktu P od punktu R (leżącego na linii brzegowej określonej przez funkcję g) w zależności od pierwszej współrzędnej x punktu R .

Tworzymy funkcję pomocniczą k określoną wzorem

$$k(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64} \quad \text{dla } x \in \left[\frac{1 - \sqrt{94}}{6}, \frac{1 + \sqrt{94}}{6}\right].$$

Obliczamy pochodną funkcji k :

$$k'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{4}x^2 + \frac{39}{8}$$

i miejsca zerowe pochodnej:

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{4}x^2 + \frac{39}{8} = 0$$

$$8x^3 - 12x^2 - 26x + 39 = 0$$

$$4x^2(2x - 3) - 13(2x - 3) = 0$$

$$(4x^2 - 13)(2x - 3) = 0$$

$$x = -\frac{\sqrt{13}}{2} \quad \vee \quad x = \frac{\sqrt{13}}{2} \quad \vee \quad x = \frac{3}{2}$$

Spośród liczb $\left(-\frac{\sqrt{13}}{2}, \frac{\sqrt{13}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ tylko liczba $\frac{3}{2}$ należy do przedziału $\left[\frac{1 - \sqrt{94}}{6}, \frac{1 + \sqrt{94}}{6}\right]$.

Zatem $k'(x) = 0$ tylko dla $x = \frac{3}{2}$.

Ponieważ:

$$k'(x) > 0 \text{ dla } x \in \left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{3}{2} \right) \text{ oraz}$$

$$k'(x) < 0 \text{ dla } x \in \left(\frac{3}{2}, \frac{1+\sqrt{94}}{6} \right],$$

więc

funkcja k jest rosnąca w zbiorze $\left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{3}{2} \right]$ oraz malejąca w zbiorze $\left[\frac{3}{2}, \frac{1+\sqrt{94}}{6} \right]$.

Zatem funkcja k osiąga wartość największą dla argumentu $x = \frac{3}{2}$.

Ponieważ funkcja $h(t) = \sqrt{t}$ jest rosnąca w zbiorze $[0, +\infty)$, więc funkcja d osiąga wartość największą dla tego samego argumentu, dla którego funkcja k osiąga wartość największą.

Stąd wynika, że funkcja d osiąga wartość największą dla argumentu $x = \frac{3}{2}$.

Obliczamy współrzędne punktu K oraz $|PK|$:

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = -0,5 \left(\frac{3}{2} - 0,5\right)^2 + 4 = 3,5$$

$$K = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$|PK| = d\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{3}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{7}{2} - 1\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Koniec toru regatowego należy zlokalizować w punkcie, który odpowiada punktowi

$K = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$. Największa możliwa długość toru regatowego jest równa $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (j).

Zadanie 7. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.5 (R) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych; VII.6 (R) rozwiązuje równania trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie $4 \cos 2x \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawne rozwiązanie równania $\sin(3x) = 2 \sin x$ w zbiorze $[0, \pi]$:

$$x = 0 \vee x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = \pi.$$

3 pkt – przekształcenie równoważne równania $\sin(3x) = 2 \sin x$ do postaci alternatywy

równań $\sin x = \frac{1}{2}$, $\sin x = -\frac{1}{2}$ oraz $\sin x = 0$ i zapisanie, że równanie

$\sin x = -\frac{1}{2}$ nie ma rozwiązań w zbiorze $[0, \pi]$, i rozwiązanie równania $\sin x = \frac{1}{2}$

(lub $\sin x = 0$) w zbiorze $[0, \pi]$: $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi$ (lub $x = 0 \vee x = \pi$).

2 pkt – przekształcenie równoważne równania $\sin(3x) = 2 \sin x$ do postaci alternatywy dwóch równań: $1 - 4\sin^2 x = 0$ lub $\sin x = 0$.

1 pkt – przekształcenie równania $\sin(3x) = 2 \sin x$ do postaci, w której występuje jedna funkcja trygonometryczna zmiennej x , np.

$$2 \sin x (1 - \sin^2 x) + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x = 2 \sin x.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy równanie $\sin(3x) = 2 \sin x$ równoważnie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna zmiennej x . Skorzystamy ze wzoru na sinus sumy kątów, wzorów na cosinus i sinus podwojonego kąta oraz z jedyńki trygonometrycznej:

$$\sin(3x) = 2 \sin x$$

$$\sin(2x + x) = 2 \sin x$$

$$\sin(2x) \cdot \cos x + \cos(2x) \cdot \sin x = 2 \sin x$$

$$2 \sin x \cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x) \sin x = 2 \sin x$$

$$2 \sin x (1 - \sin^2 x) + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x = 2 \sin x$$

$$-4 \sin^3 x + \sin x = 0$$

Stąd otrzymujemy dalej

$$(-4 \sin^2 x + 1) \sin x = 0$$

$$-4 \sin^2 x + 1 = 0 \quad \vee \quad \sin x = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \sin x = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad \sin x = 0$$

Równanie $\sin x = \frac{1}{2}$ ma w zbiorze $[0, \pi]$ dwa rozwiązania: $x = \frac{1}{6}\pi$ oraz $x = \frac{5}{6}\pi$.

Równanie $\sin x = -\frac{1}{2}$ nie ma w zbiorze $[0, \pi]$ rozwiązań.

Równanie $\sin x = 0$ ma w zbiorze $[0, \pi]$ dwa rozwiązania: $x = 0$ oraz $x = \pi$.

Równanie $\sin(3x) = 2 \sin x$ ma w zbiorze $[0, \pi]$ cztery rozwiązania: $0, \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi$.

Zadanie 8. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.1) (R) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu; VIII.2) (R) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawne zastosowanie twierdzeń i zależności prowadzących do obliczenia promienia R okręgu opisanego na trapezie $ABCD$ i pokazanie, że

$$R = \frac{d \cdot l}{2\sqrt{16d^2 - l^2}}.$$

3 pkt – zastosowanie twierdzenia sinusów do trójkąta ABC i zapisanie równości $2R = \frac{d}{\sin \alpha}$.

2 pkt – obliczenie wysokości h trapezu $ABCD$: $h = \frac{\sqrt{16d^2 - l^2}}{4}$.

1 pkt – zastosowanie własności czworokąta opisanego na okręgu i obliczenie c : $c = \frac{1}{4}l$

LUB

zastosowanie twierdzenia Pitagorasa do trójkąta AEC i zapisanie równości

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + h^2 = d^2.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

a – długość podstawy AB trapezu,

b – długość podstawy CD trapezu,

h – wysokość trapezu $ABCD$,

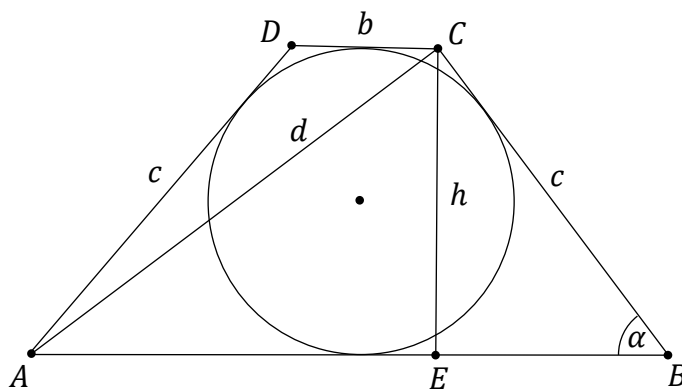
c – długość ramienia trapezu $ABCD$,

α – miara kąta ABC trapezu.

E – punkt wspólny prostej

przechodzącej przez C i zawierającej wysokość trapezu oraz odcinka AB

(zobacz rysunek).



Trapez $ABCD$ jest równoramienny, więc $|EB| = \frac{a-b}{2}$ oraz $|AE| = \frac{a+b}{2}$.

Ponieważ $a + b + 2c = l$ (z warunków zadania) oraz $a + b = 2c$ (z własności czworokąta opisanego na okręgu otrzymujemy), więc $4c = l$, czyli $c = \frac{1}{4}l$. Stąd też $|AE| = \frac{a+b}{2} = c$.

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta AEC i wyznaczamy wysokość h trapezu:

$$|AE|^2 + |EC|^2 = |AC|^2$$

$$c^2 + h^2 = d^2.$$

$$h^2 = d^2 - c^2 = d^2 - \left(\frac{l}{4}\right)^2$$

$$h = \frac{\sqrt{16d^2 - l^2}}{4}$$

Okrąg opisany na trapezie $ABCD$ jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie ABC . Stosujemy twierdzenie sinusów do wyznaczenia promienia R okręgu opisanego na trójkącie ABC :

$$2R = \frac{|AC|}{\sin \alpha}$$

Sinus kąta α obliczamy z trójkąta prostokątnego BEC :

$$\sin \alpha = \frac{h}{c} = \frac{\frac{\sqrt{16d^2 - l^2}}{4}}{\frac{l}{4}} = \frac{\sqrt{16d^2 - l^2}}{l}$$

Zatem promień R jest równy

$$R = \frac{|AC|}{2 \sin \alpha} = \frac{d \cdot l}{2\sqrt{16d^2 - l^2}}$$

To kończy dowód.

Zadanie 9. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.1) (R) posługuje się równaniem prostej w postaci ogólnej na płaszczyźnie, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach [...]; IX.3) (R) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu [...].

Zasady oceniania

6 pkt – wyznaczenie równania prostej BC i obliczenie współrzędnych punktu styczności prostej BC z okręgiem \mathcal{O} : $y = 0$ i $(8, 0)$.

5 pkt – uzasadnienie, że prosta o równaniu $y = -\frac{12}{5}x + \frac{168}{5}$ nie przechodzi przez punkt B i obliczenie współrzędnych punktu B : $B = (0, 0)$.

4 pkt – obliczenie współrzędnych punktu B : $B = (0, 0)$
 LUB

– uzasadnienie, że prosta o równaniu $y = -\frac{12}{5}x + \frac{168}{5}$ nie przechodzi przez punkt B .

3 pkt – wyznaczenie równań prostych, które są styczne do okręgu \mathcal{O} i przechodzą przez punkt A , np. $y = \frac{4}{3}x$ i $y = -\frac{12}{5}x + \frac{168}{5}$.

2 pkt – zastosowanie wzoru na odległość punktu od prostej i zapisanie równania z jedną niewiadomą, prowadzącego do wyznaczenia współczynników występujących w równaniu prostej, która jest styczna do okręgu \mathcal{O} i przechodzi przez punkt A , np.

$$\frac{|a \cdot 8 - 4 + 12 - 9a|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 4.$$

1 pkt – zapisanie równania prostej, która jest styczna do okręgu i przechodzi przez punkt A w postaci kierunkowej (lub ogólnej), ze współczynnikami zależnymi od jednego parametru, np. $y = ax + 12 - 9a$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy przez l prostą, która przechodzi przez wierzchołki A i B trójkąta ABC . Prosta ta jest styczna do okręgu \mathcal{O} . Równanie prostej l można zapisać w postaci kierunkowej $y = ax + b$ (prosta o równaniu $x = 9$ nie jest styczna do okręgu, gdyż równanie $(9 - 8)^2 + (y - 4)^2 = 16$ ma dwa rozwiązania). Ponieważ $A \in l$, więc $12 = 9a + b$, czyli $b = 12 - 9a$.

Prosta l ma równanie $ax - y + 12 - 9a = 0$ i jest styczna do okręgu o środku $S = (8, 4)$ i promieniu 4. Zatem odległość punktu S od prostej l jest równa 4:

$$\frac{|a \cdot 8 - 4 + 12 - 9a|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 4$$

Stąd, poprzez przekształcenia równoważne, otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} |8 - a| &= 16\sqrt{a^2 + 1} \\ 64 - 16a + a^2 &= 16a^2 + 16 \\ 15a^2 + 16a - 48 &= 0 \\ a &= \frac{4}{3} \quad \vee \quad a = -\frac{12}{5} \end{aligned}$$

Rozważamy przypadek $a = \frac{4}{3}$.

Gdy $a = \frac{4}{3}$, to $b = 0$ i równanie prostej l ma postać $y = \frac{4}{3}x$.

Wierzchołek B trójkąta ABC jest punktem przecięcia prostych k i l .

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$ jest $(x, y) = (0, 0)$. Zatem $B = (0, 0)$. Ponieważ

okrąg \mathcal{O} jest styczny do osi Ox i $B = (0, 0)$, więc prosta o równaniu $y = 0$ zawiera bok BC trójkąta ABC styczny do danego okręgu w punkcie $(8, 0)$.

Rozważamy przypadek $a = -\frac{12}{5}$.

Gdy $a = -\frac{12}{5}$, to $b = \frac{168}{5}$ i otrzymujemy prostą l o równaniu $y = -\frac{12}{5}x + \frac{168}{5}$.

Zauważmy jednak, że prosta o równaniu $y = \frac{5}{12}x$ jest prostopadła do prostej $y = -\frac{12}{5}x + \frac{168}{5}$ i tworzy z osią Ox kąt ostry o mierze α takiej, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$. Prosta k tworzy z osią Ox kąt ostry o mierze β takiej, że $\tan \beta = \frac{1}{2}$. Zatem, korzystając z własności funkcji tangens, otrzymujemy $\alpha < \beta$. Wynika stąd, że $|\sphericalangle ABS| > 90^\circ$, gdzie B jest punktem przecięcia prostych k i l . To jest jednak niemożliwe, gdyż (z założenia) $|\sphericalangle ABS| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ABC|$, a $\frac{1}{2}|\sphericalangle ABC| < \frac{1}{2} \cdot 180^\circ$.

Zadanie 10. (0–6)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.4) oblicza objętości i pola powierzchni [...] ostrosłupów, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń. X.5) (R) wyznacza przekroje [...] ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

Zasady oceniania

dla sposobu 1.

6 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na objętość V ostrosłupa i poprawne obliczenie

$$\text{współczynnika } k: k = \frac{\sqrt{2}}{36}.$$

5 pkt – obliczenie, przy obranych wartościach P i α , wysokości H ostrosłupa:

$$H = \sqrt{\frac{P \cdot \cos(2\alpha)}{4\sqrt{2} \cdot \sin \alpha}}.$$

4 pkt – obliczenie, przy obranych wartościach P i α , kwadratu długości krawędzi podstawy oraz kwadratu wysokości ściany bocznej ostrosłupa: $a^2 = \sqrt{2}P \cdot \sin \alpha$,

$$h^2 = \frac{P}{4\sqrt{2} \cdot \sin \alpha}.$$

3 pkt – obliczenie, przy obranych wartościach P i α , kwadratu długości krawędzi podstawy ostrosłupa: $a^2 = \sqrt{2}P \cdot \sin \alpha$

LUB

obliczenie, przy obranych wartościach P i α , kwadratu wysokości ściany bocznej

$$\text{ostrosłupa: } h^2 = \frac{P}{4\sqrt{2} \cdot \sin \alpha}.$$

2 pkt – zastosowanie, przy obranych wartościach P i α , definicji sinusa w trójkącie EGS (albo twierdzenia cosinusów do trójkąta EFS) i zapisanie równania z jedną niewiadomą a , np.

$$\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{P}{2a}} = \sin \alpha, \left(\frac{P}{2a}\right)^2 + \left(\frac{P}{2a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{P}{2a} \cdot \frac{P}{2a} \cdot \cos(2\alpha) = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

LUB

zapisanie, przy obranych wartościach P i α , zależności między h oraz a ,

$$\text{wynikających ze związków miarowych w trójkącie } ESF \text{ (lub } EGS), \text{ np. } h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

LUB

zastosowanie, przy obranych wartościach P i α , definicji sinusa w trójkącie EGS (albo twierdzenia cosinusów do trójkąta EFS) i zapisanie równania z jedną niewiadomą h , np.

$$\frac{\frac{P\sqrt{2}}{8h}}{\frac{P}{h}} = \sin \alpha, h^2 + h^2 - 2 \cdot h \cdot h \cdot \cos(2\alpha) = \left(\frac{P\sqrt{2}}{4h}\right)^2.$$

1 pkt – przypisanie wielkościom P i α konkretnych wartości liczbowych (pod warunkami: $P > 0$ i $\alpha \in (0, 45^\circ)$) i wyznaczenie wysokości h ściany bocznej w zależności od długości a krawędzi podstawy ostrosłupa: $h = \frac{P}{2a}$

LUB

przypisanie wielkościom P i α konkretnych wartości liczbowych (pod warunkami: $P > 0$ i $\alpha \in (0, 45^\circ)$) i wyznaczenie długości a krawędzi bocznej w zależności od wysokości h ściany bocznej ostrosłupa: $a = \frac{P}{2h}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

dla sposobu 2.

6 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na objętość V ostrosłupa i poprawne obliczenie współczynnika k : $k = \frac{\sqrt{2}}{36}$.

5 pkt – obliczenie wysokości H ostrosłupa: $H = \sqrt{\frac{P}{4\sqrt{2}\cdot\sin\alpha} - \frac{\sqrt{2}P\cdot\sin\alpha}{4}}$.

4 pkt – obliczenie kwadratu długości krawędzi podstawy oraz kwadratu wysokości ściany bocznej ostrosłupa: $a^2 = \sqrt{2}P \cdot \sin\alpha$, $h^2 = \frac{P}{4\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}$.

3 pkt – obliczenie kwadratu długości krawędzi podstawy ostrosłupa: $a^2 = \sqrt{2}P \cdot \sin\alpha$
LUB

obliczenie kwadratu wysokości ściany bocznej ostrosłupa: $h^2 = \frac{P}{4\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}$.

2 pkt – zastosowanie definicji sinusa w trójkącie EGS (albo twierdzenia cosinusów do trójkąta EFS) i zapisanie równania z jedną niewiadomą a , np.

$$\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{P}{2a}} = \sin\alpha, \left(\frac{P}{2a}\right)^2 + \left(\frac{P}{2a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{P}{2a} \cdot \frac{P}{2a} \cdot \cos(2\alpha) = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

LUB

zastosowanie definicji sinusa w trójkącie EGS (albo twierdzenia cosinusów do trójkąta EFS) i zapisanie równania z jedną niewiadomą h , np.

$$\frac{\frac{P\sqrt{2}}{8h}}{\frac{P}{h}} = \sin\alpha, h^2 + h^2 - 2 \cdot h \cdot h \cdot \cos(2\alpha) = \left(\frac{P\sqrt{2}}{4h}\right)^2$$

1 pkt – wyznaczenie wysokości h ściany bocznej w zależności od długości a krawędzi podstawy ostrosłupa: $h = \frac{P}{2a}$

LUB

wyznaczenie długości a krawędzi bocznej w zależności od wysokości h ściany bocznej ostrosłupa: $a = \frac{P}{2h}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Ponieważ k jest współczynnikiem liczbowym, który nie zależy od P ani od α , więc obliczymy objętość ostrosłupa prawidłowego o polu powierzchni bocznej $P = \sqrt{2}$, w którym $\alpha = 30^\circ$.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:

a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa,

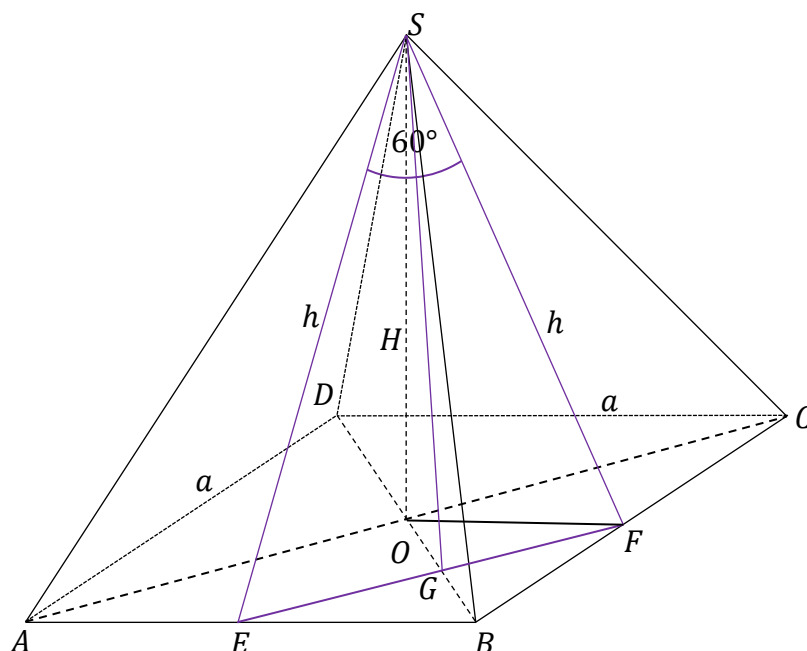
h – wysokość ściany bocznej ostrosłupa poprowadzonej z wierzchołka S ,

H – wysokość ostrosłupa,

O – punkt przecięcia przekątnych podstawy $ABCD$,

SE, SF – wysokości sąsiednich ścian bocznych,

SG – wysokość trójkąta SEG poprowadzona z wierzchołka S .



Wyznaczamy wysokość h ściany bocznej ostrosłupa $ABCDS$ poprowadzonej z wierzchołka S w zależności od długości a krawędzi podstawy ostrosłupa:

$$\sqrt{2} = 4 \cdot \frac{1}{2} ah$$

$$h = \frac{\sqrt{2}}{2a}$$

Ponieważ $\alpha = 30^\circ$, więc trójkąt równoramienny ESF jest równoboczny. Zatem

$$h = |EF| = \sqrt{2} \cdot |EB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Stąd}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2a} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$a = 1$$

więc

$$h^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2a}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta FOS i obliczamy wysokość H ostrosłupa $ABCD$:

$$|OS|^2 = |FS|^2 - |OF|^2$$

$$H^2 = h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$H^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$H = \frac{1}{2}$$

Obliczamy objętość V ostrosłupa $ABCD$:

$$V = \frac{1}{3}a^2H = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Z treści zadania wiadomo, że $V = \sqrt{k \cdot P^3 \cdot \sin \alpha \cdot \cos(2\alpha)}$, więc $V = \sqrt{k \cdot (\sqrt{2})^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}$.

Porównując otrzymane wartości objętości, obliczamy k :

$$\frac{1}{6} = \sqrt{k \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$k = \frac{\sqrt{2}}{36}$$

Współczynnik k ma wartość $\frac{\sqrt{2}}{36}$.

Sposób 2.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:

a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa,

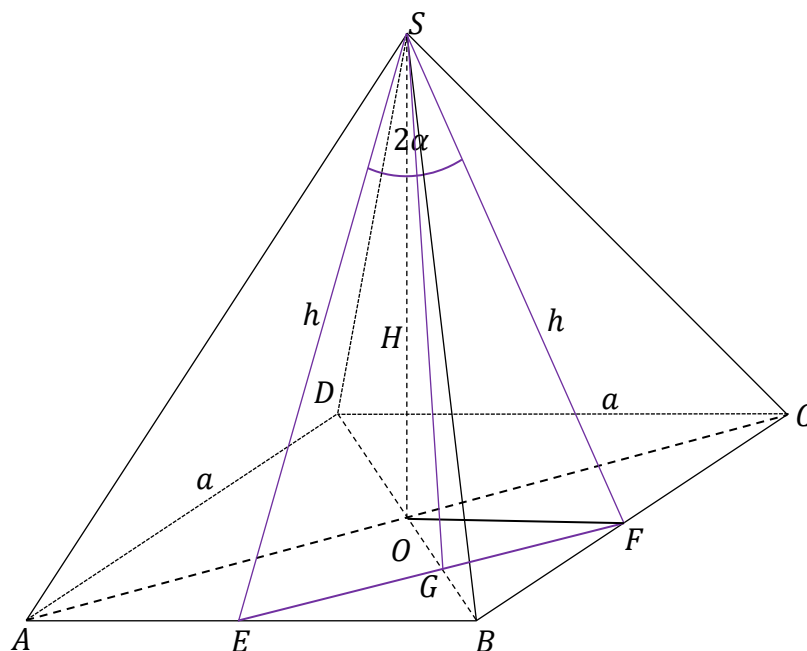
h – wysokość ściany bocznej ostrosłupa poprowadzonej z wierzchołka S ,

H – wysokość ostrosłupa,

O – punkt przecięcia przekątnych podstawy $ABCD$,

SE, SF – wysokości sąsiednich ścian bocznych,

SG – wysokość trójkąta SEG poprowadzona z wierzchołka S .



Wyznaczamy wysokość h ściany bocznej ostrosłupa $ABCDS$ poprowadzonej z wierzchołka S w zależności od długości a krawędzi podstawy ostrosłupa:

$$P = 4 \cdot \frac{1}{2} ah$$

$$h = \frac{P}{2a}$$

Ponieważ $|EF| = \sqrt{2} \cdot |EB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, więc $|EG| = \frac{1}{2}|EF| = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Zatem

$$\frac{|EG|}{|ES|} = \sin \alpha$$

$$\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{P}{2a}} = \sin \alpha$$

$$a^2 = \sqrt{2}P \cdot \sin \alpha$$

Stąd

$$h^2 = \left(\frac{P}{2a}\right)^2 = \frac{P}{4\sqrt{2} \cdot \sin \alpha}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta FOS i obliczamy wysokość H ostrosłupa $ABCDS$:

$$|OS|^2 = |FS|^2 - |OF|^2$$

$$H^2 = h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$H^2 = \frac{P}{4\sqrt{2} \cdot \sin \alpha} - \frac{\sqrt{2}P \cdot \sin \alpha}{4}$$

$$H^2 = \frac{P(1 - 2 \sin^2 \alpha)}{4\sqrt{2} \cdot \sin \alpha}$$

$$H = \sqrt{\frac{P \cdot \cos(2\alpha)}{4\sqrt{2} \cdot \sin \alpha}}$$

Obliczamy objętość V ostrosłupa $ABCD$:

$$V = \frac{1}{3} a^2 H = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} P \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{\frac{P \cos(2\alpha)}{4\sqrt{2} \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{36}} \cdot P^3 \cdot \sin \alpha \cdot \cos(2\alpha)$$

Zatem $k = \frac{\sqrt{2}}{36}$.

Zadanie 11. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.2) (R) stosuje schemat Bernoulliego.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia prawdopodobieństwa zaliczenia egzaminu przez studenta i poprawny wynik: $\frac{123841}{4^{15}}$.

3 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w n próbach i skorzystanie z addytywności prawdopodobieństwa dla zdarzeń parami rozłącznych.

2 pkt – wyznaczenie zdarzenia odpowiadającego zaliczeniu egzaminu za pomocą zdarzeń S_{15}^k , gdzie $k \in \{11, 12, 13, 14, 15\}$: $S_{15}^{11} \cup S_{15}^{12} \cup S_{15}^{13} \cup S_{15}^{14} \cup S_{15}^{15}$.

1 pkt – obliczenie prawdopodobieństwa sukcesu i porażki.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Próba Bernoulliego jest losowe wybranie przez studenta odpowiedzi w zadaniu. Sukcesem w tej próbie jest wybranie odpowiedzi, która jest poprawna.

Prawdopodobieństwo sukcesu jest równe $p = 0,25$, natomiast prawdopodobieństwo porażki jest równe $q = 0,75$.

Niech S_{15}^k oznacza zdarzenie polegające na wybraniu przez studenta poprawnych odpowiedzi w dokładnie k zadaniach spośród 15.

Korzystamy ze schematu Bernoulliego. Prawdopodobieństwo zaliczenia przez studenta egzaminu jest równe $P(S_{15}^{11} \cup S_{15}^{12} \cup S_{15}^{13} \cup S_{15}^{14} \cup S_{15}^{15})$. Zdarzenia $S_{15}^{11}, S_{15}^{12}, S_{15}^{13}, S_{15}^{14}, S_{15}^{15}$ są parami rozłączne, więc

$$\begin{aligned}
 P(S_{15}^{11} \cup S_{15}^{12} \cup S_{15}^{13} \cup S_{15}^{14} \cup S_{15}^{15}) &= P(S_{15}^{11}) + P(S_{15}^{12}) + P(S_{15}^{13}) + P(S_{15}^{14}) + P(S_{15}^{15}) = \\
 &= \binom{15}{11} \cdot (0,25)^{11} \cdot (0,75)^4 + \binom{15}{12} \cdot (0,25)^{12} \cdot (0,75)^3 + \binom{15}{13} \cdot (0,25)^{13} \cdot (0,75)^2 + \\
 &+ \binom{15}{14} \cdot (0,25)^{14} \cdot (0,75)^1 + \binom{15}{15} \cdot (0,25)^{15} = \\
 &= \left(\frac{1}{4}\right)^{15} \cdot (1365 \cdot 81 + 455 \cdot 27 + 105 \cdot 9 + 15 \cdot 3 + 1) = \left(\frac{1}{4}\right)^{15} \cdot 123841 \approx 0,00012
 \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo zaliczenia przez studenta egzaminu jest równe $\frac{123841}{1024^3}$.