CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD | **PESEL**

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to **E-100**.
Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny *Formuła 2015*

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza
EMAP-R0-100-2405

DATA: **15 maja 2024 r.**
GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**
CZAS TRWANIA: **180 minut**
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

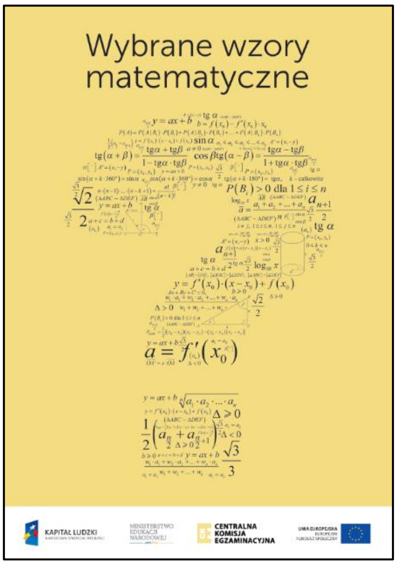
Uprawnienia zdającego do:
- ☐ dostosowania zasad oceniania
- ☐ nieprzenoszenia odpowiedzi na kartę.

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 29 stron (zadania 1–16). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–4) zaznacz na karcie odpowiedzi w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj ■ pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ■ i zaznacz właściwe.
4. W zadaniu 5. wpisz odpowiednie cyfry w kratki pod treścią zadania.
5. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (6–16) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
6. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
7. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
8. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
9. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
10. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
11. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



**Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.**

W każdym z zadań od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Odległość punktu $A = (6, 2)$ od prostej o równaniu $5x - 12y + 1 = 0$ jest równa

A. $\frac{7}{13}$ **B.** $\frac{7}{12}$ **C.** $\frac{5}{12}$ **D.** $\frac{12}{13}$

Zadanie 2. (0–1)

Równanie $|2x - 4| = 3x + 1$ w zbiorze liczb rzeczywistych

A. nie ma rozwiązań.
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie.
C. ma dokładnie dwa rozwiązania.
D. ma dokładnie cztery rozwiązania.

Zadanie 3. (0–1)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = |-(x+2)^3 + 5|$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział

A. $\langle -2, +\infty)$ **B.** $\langle 0, +\infty)$ **C.** $\langle 3, +\infty)$ **D.** $\langle 5, +\infty)$

Zadanie 4. (0–1)

Granica $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1 + 3a + 2ax + ax^3}{3 + 4x + 5x^2 + 5x^3}$ jest równa 3. Wtedy

A. $a = 3$ **B.** $a = 9$ **C.** $a = 15$ **D.** $a = 21$

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 5. (0–2)

Wielomian $W(x) = 8x^3 + 14x^2 + 5x + 3$ jest iloczynem wielomianów $P(x) = 2x + 3$ oraz $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – wartości współczynników: a, b oraz c.

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 6. (0–3)

Wykaż, że jeżeli $\log_5 4 = a$ oraz $\log_4 3 = b$, to $\log_{12} 80 = \frac{2a+1}{a\cdot(1+b)}$.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	5.	6.
	Maks. liczba pkt	2	3
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 7. (0–3)

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Przekątne AC oraz BD tego czworokąta przecinają się w punkcie S.

Wykaż, że jeżeli $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$, to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	7.
	Maks. liczba pkt	3
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 8. (0–3)

Rozważamy wszystkie liczby naturalne, w których zapisie dziesiętnym nie powtarza się jakakolwiek cyfra oraz dokładnie trzy cyfry są nieparzyste i dokładnie dwie cyfry są parzyste. Oblicz, ile jest wszystkich takich liczb.

Zadanie 9. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x}$$

dla każdej liczby rzeczywistej x różnej od zera. Punkt P, o pierwszej współrzędnej równej 2, należy do wykresu funkcji f. Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie P.

Oblicz współczynniki a oraz b w równaniu tej stycznej.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	8.	9.
	Maks. liczba pkt	3	3
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 10. (0–3)

Spośród wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, których wszystkie cyfry należą do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, losujemy jedną. Wylosowanie każdej z tych liczb jest jednakowo prawdopodobne.
Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy liczbę, która ma następującą własność: kolejne cyfry tej liczby (licząc od lewej strony) tworzą – w podanej kolejności – sześciowyrazowy ciąg malejący.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	10.
	Maks. liczba pkt	3
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 11. (0–4)

Trzywyrazowy ciąg (x, y, z) jest geometryczny i rosnący. Suma wyrazów tego ciągu jest równa 105. Liczby x, y oraz z są – odpowiednio – pierwszym, drugim oraz szóstym wyrazem ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.
Oblicz x, y oraz z.

Wypełnia egzaminator	**Nr zadania**	**11.**
	Maks. liczba pkt	**4**
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 12. (0–4)
Rozwiąż równanie

$$\sin(2x) + \cos(2x) = 1 + \sin x - \cos x$$

w zbiorze $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	12.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 13. (0–4)

Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy 17. Najdłuższym bokiem tego trójkąta jest bok AC, a długości dwóch pozostałych boków są równe $|AB| = 30$ oraz $|BC| = 17$. Oblicz miarę kąta BAC oraz długość boku AC tego trójkąta.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	13.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 14. (0–5)

Środek S okręgu o promieniu $\sqrt{5}$ leży na prostej o równaniu $y = x + 1$. Przez punkt $A = (1, 2)$, którego odległość od punktu S jest większa od $\sqrt{5}$, poprowadzono dwie proste styczne do tego okręgu w punktach – odpowiednio – B i C. Pole czworokąta $ABSC$ jest równe 15.

Oblicz współrzędne punktu S. Rozważ wszystkie przypadki.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	14.
	Maks. liczba pkt	5
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 15. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$x^2 - (3m + 1) \cdot x + 2m^2 + m + 1 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 , x_2 spełniające warunek

$$x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	15.
	Maks. liczba pkt	6
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 16. (0–6)

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o objętości 3456, których krawędź podstawy ma długość nie większą niż $8\sqrt{3}$.

a) Wykaż, że pole P powierzchni całkowitej graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy graniastosłupa jest określone wzorem

$$P(a) = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a}$$

b) Pole P powierzchni całkowitej graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy graniastosłupa jest określone wzorem

$$P(a) = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a}$$

dla $a \in (0, 8\sqrt{3}\rangle$.

Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	16.
	Maks. liczba pkt	6
	Uzyskana liczba pkt	

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

MATEMATYKA
Poziom rozszerzony
Formuła 2015

MATEMATYKA
Poziom rozszerzony
Formuła 2015