

**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2015/2016**

**FORMUŁA OD 2015  
(„NOWA MATURA”)**

**MATEMATYKA  
POZIOM ROZSZERZONY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ  
ARKUSZ MMA-P1**

**MAJ 2016**

## Ogólne zasady oceniania

*Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.*

### Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odp. (1 p.)
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$ (R2.1).	<b>C</b>

### Zadanie 2. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$ (R3.4).	<b>D</b>
--	---	----------

### Zadanie 3. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y =  f(x) $ , $y = c \cdot f(x)$ , $y = f(cx)$ (R4.1).	<b>B</b>
--	--	----------

### Zadanie 4. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający oblicza pochodne funkcji wymiernych (R11.2).	<b>A</b>
--	--	----------

### Zadanie 5. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych (R11.1).	<b>D</b>
--	--	----------

### Zadanie 6. (0–2)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwo warunkowe (R10.2).	<b>753</b>
--------------------------------	--	------------

**Zadanie 7. (0–2)**

III. Modelowanie matematyczne.

5. Ciągi. Zdający rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy (R5.3).

**Przykładowe rozwiązania**I sposób

Pierwszym wyrazem ciągu  $(a_n)$  jest  $a_1 = \frac{1}{2x-371}$ . Ilorazem tego ciągu jest  $q = \frac{1}{2x-371}$ .

Ponieważ wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie, więc szereg jest zbieżny, gdy

$$0 < \frac{1}{2x-371} < 1. \text{ Zatem}$$

$$2x-371 > 0 \text{ i } 2x-371 > 1.$$

Stąd

$$\begin{aligned} 2x &> 372, \\ x &> 186. \end{aligned}$$

Zatem szukaną liczbą całkowitą jest 187.

II sposób

Pierwszym wyrazem ciągu  $(a_n)$  jest  $a_1 = \frac{1}{2x-371}$ , ilorazem tego ciągu zaś jest

$$q = \frac{1}{2x-371}. \text{ Szereg geometryczny jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy: } \left| \frac{1}{2x-371} \right| < 1.$$

Rozwiązujemy powyższą nierówność:

$$-1 < \frac{1}{2x-371} < 1,$$

$$0 < \frac{2x-370}{2x-371} \wedge \frac{-2x+372}{2x-371} < 0,$$

$$x \neq 185,5 \wedge (x-185)(x-185,5) > 0 \wedge (x-186)(x-185,5) > 0,$$

$$x \in (-\infty, 185) \cup (186, +\infty).$$

Wszystkie wyrazy ciągu  $(a_n)$  są dodatnie, więc  $x \in (186, +\infty)$ . Zatem szukaną liczbą całkowitą jest 187.

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje..... 1 p.**

gdy zapisze  $q = \frac{1}{2x-371}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje..... 2 p.**

gdy zapisze najmniejszą liczbę całkowitą  $x$ , dla której nieskończony szereg jest zbieżny, tzn. liczbę 187, o ile wynik nie został uzyskany w wyniku błędnego rozwiązania.

*Uwaga:*

Jeżeli zdający bez stosownych obliczeń i bez komentarza zapisuje, że szukaną liczbą jest 187 i na tym zakończy, to otrzymuje **1 punkt**.

### Zadanie 8. (0–3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).
--------------------------------	--

### Przykładowe rozwiązanie

#### I sposób

Dla dowolnych liczb dodatnich  $x$  i  $y$  takich, że  $x^2 + y^2 = 2$  nierówność  $x + y \leq 2$  jest równoważna kolejno nierównościami

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &\leq 4, \\ x^2 + 2xy + y^2 &\leq 4, \\ x^2 + 2xy + y^2 &\leq 2 \cdot 2, \\ x^2 + y^2 + 2xy &\leq 2(x^2 + y^2), \\ x^2 + y^2 + 2xy &\leq 2x^2 + 2y^2, \\ x^2 + y^2 - 2xy &\geq 0, \\ (x - y)^2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Ta ostatnia nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$ . To kończy dowód.

#### Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy uzasadni, że dla dowolnych liczb dodatnich  $x$  i  $y$  takich, że  $x^2 + y^2 = 2$  nierówność  $x + y \leq 2$  jest równoważna nierówności  $x^2 + 2xy + y^2 \leq 2 \cdot 2$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy uzasadni, że dla dowolnych liczb dodatnich  $x$  i  $y$  takich, że  $x^2 + y^2 = 2$  nierówność  $x + y \leq 2$  jest równoważna nierówności  $x^2 + y^2 + 2xy \leq 2(x^2 + y^2)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

### Przykładowe rozwiązanie

#### II sposób

Niech  $x$  i  $y$  będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że  $x^2 + y^2 = 2$ .

Obie strony nierówności  $x + y \leq 2$  są dodatnie, więc podnosząc obie strony nierówności do kwadratu otrzymujemy nierówność równoważną

$$x^2 + y^2 + 2xy \leq 4.$$

Stąd otrzymujemy  $2 + 2xy \leq 4$ , więc  $xy \leq 1$ .

Obie strony tej nierówności  $xy \leq 1$  są dodatnie, więc podnosząc obie strony nierówności do kwadratu otrzymujemy nierówność równoważną

$$x^2 y^2 \leq 1.$$

Z założenia  $y^2 = 2 - x^2$ . Wówczas nierówność  $x^2 y^2 \leq 1$  jest równoważna nierównościom

$$x^2 (2 - x^2) \leq 1,$$

$$-x^4 + 2x^2 \leq 1,$$

$$x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0,$$

$$(x^2 - 1)^2 \geq 0.$$

Ta ostatnia nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ . To kończy dowód.

### Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy uzasadni, że dla dowolnych liczb dodatnich  $x$  i  $y$  takich, że  $x^2 + y^2 = 2$  nierówność  $x + y \leq 2$  jest równoważna nierówności  $xy \leq 1$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy zapisze nierówność z jedną niewiadomą, np.  $x(\sqrt{2-x^2}) \leq 1$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

### Przykładowe rozwiązanie

#### III sposób

Niech  $x$  i  $y$  będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że  $x^2 + y^2 = 2$ .

Wykorzystując nierówność między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową, otrzymujemy

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Stąd i z równości  $x^2 + y^2 = 2$  wynika, że  $\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$ , czyli  $x + y \leq 2$ . To kończy dowód.

### Schemat punktowania III sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy zapisze nierówność między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**

gdy zapisze nierówność między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową i na tej podstawie uzasadni prawdziwość nierówności  $x+y \leq 2$ .

### Przykładowe rozwiązanie

#### IV sposób

Dla dowolnych liczb dodatnich  $x$  i  $y$  takich, że  $x^2 + y^2 = 2$  nierówność  $x + y \leq 2$  jest równoważna kolejno nierównościom

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &\leq 4, \\ x^2 + 2xy + y^2 &\leq 4, \\ 2 + 2xy &\leq 4, \\ xy &\leq 1, \\ x^2 y^2 &\leq 1.\end{aligned}$$

Możemy przyjąć, że  $x^2 = 1 - p$  oraz  $y^2 = 1 + p$ , gdzie  $-1 < p < 1$ . Zatem nierówność  $x^2 y^2 \leq 1$  przyjmuje postać  $(1-p)(1+p) \leq 1$ , czyli  $1 - p^2 \leq 1$ , co jest prawdą dla każdej liczby rzeczywistej  $p$ , więc, w szczególności, dla każdej liczby  $-1 < p < 1$ . To kończy dowód.

### Schemat punktowania IV sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy uzasadni, że dla dowolnych liczb dodatnich  $x$  i  $y$  takich, że  $x^2 + y^2 = 2$  nierówność  $x + y \leq 2$  jest równoważna nierówności  $xy \leq 1$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy uzasadni, że dla dowolnych liczb dodatnich  $x$  i  $y$  takich, że  $x^2 + y^2 = 2$  nierówność  $x + y \leq 2$  jest równoważna nierówności  $x^2 y^2 \leq 1$  oraz przyjmie, że  $x^2 = 1 - p$  oraz  $y^2 = 1 + p$ , gdzie  $-1 < p < 1$ , i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

### Przykładowe rozwiązanie

#### V sposób

Niech  $x$  i  $y$  będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że  $x^2 + y^2 = 2$ .

Stąd

$$x^2 + 2xy + y^2 = 2 + 2xy,$$

$$(x + y)^2 = 2 + 2xy,$$

$$x + y = \sqrt{2 + 2xy}.$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$  prawdziwa jest nierówność  $(x - y)^2 \geq 0$ , a stąd kolejno

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0,$$

$$2xy \leq x^2 + y^2.$$

Zatem dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$  takich, że  $x^2 + y^2 = 2$  prawdziwa jest nierówność

$$2xy \leq 2,$$

$$xy \leq 1.$$

Stąd wynika, że

$$x + y = \sqrt{2 + 2xy} \leq \sqrt{2 + 2 \cdot 1} = \sqrt{4} = 2.$$

To kończy dowód.

### Schemat punktowania V sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy

- uzasadni, że dla dowolnych liczb dodatnich  $x$  i  $y$  takich, że  $x^2 + y^2 = 2$  nierówność  $x + y \leq 2$  równoważna nierówności  $xy \leq 1$

albo

- zapisze, że dla dowolnych liczb dodatnich  $x$  i  $y$  takich, że  $x^2 + y^2 = 2$  suma liczb  $x$  i  $y$  jest równa  $x + y = \sqrt{2 + 2xy}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy uzasadni, że dla dowolnych liczb dodatnich  $x$  i  $y$  takich, że  $x^2 + y^2 = 2$  nierówność  $x + y \leq 2$  równoważna nierówności  $xy \leq 1$  oraz zapisze sumę liczb  $x$  i  $y$  w postaci  $x + y = \sqrt{2 + 2xy}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

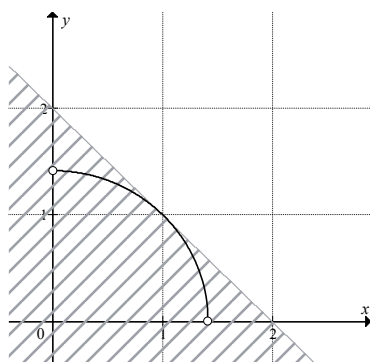
**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

## Przykładowe rozwiązanie

### VI sposób

Niech  $x$  i  $y$  będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że  $x^2 + y^2 = 2$ . To oznacza, że każda para liczb  $(x, y)$  spełniająca to równanie stanowi współrzędne punktu leżącego w I ćwiartce układu współrzędnych na okręgu o środku  $S = (0, 0)$  i promieniu  $r = \sqrt{2}$ . Punkt  $A = (1, 1)$  leży na tym okręgu, więc prosta o równaniu  $y = x$  zawiera średnicę tego okręgu. Oznacza to, że prosta prostopadła do niej i przechodząca przez punkt  $A$  jest styczna do okręgu. Ma ona równanie  $y = -(x-1)+1$ , czyli  $x + y = 2$ . Ta prosta wyznacza dwie półpłaszczyzny, z których jedna opisana jest nierównością  $x + y \leq 2$ . Środek  $S$  okręgu leży w tej półpłaszczyźnie, gdyż  $0 + 0 = 0 < 2$ . Stąd wynika, że w tej półpłaszczyźnie leżą też wszystkie punkty okręgu.



To kończy dowód.

### Schemat punktowania VI sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy zapisze, że wszystkie punkty  $P = (x, y)$ , których współrzędne spełniają równanie  $x^2 + y^2 = 2$ , leżą na okręgu o środku  $S = (0, 0)$  i promieniu  $r = \sqrt{2}$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy zapisze, że wszystkie punkty  $P = (x, y)$ , których współrzędne spełniają równanie  $x^2 + y^2 = 2$ , leżą na okręgu o środku  $S = (0, 0)$  i promieniu  $r = \sqrt{2}$  oraz że każdy punkt okręgu leży w półpłaszczyźnie opisanej nierównością  $x + y \leq 2$ , ale nie stwierdzi, że krawędź tej półpłaszczyzny jest styczna do okręgu i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**  
gdy zapisze, że wszystkie punkty  $P = (x, y)$ , których współrzędne spełniają równanie  $x^2 + y^2 = 2$ , leżą na okręgu o środku  $S = (0, 0)$  i promieniu  $r = \sqrt{2}$  oraz że każdy punkt okręgu leży w półpłaszczyźnie opisanej nierównością  $x + y \leq 2$ , a także stwierdzi, że prosta o równaniu  $x + y = 2$  jest styczna do tego okręgu.

### Przykładowe rozwiązanie

#### VII sposób

Niech  $x$  i  $y$  będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że  $x^2 + y^2 = 2$ . Stąd otrzymujemy  $y^2 = 2 - x^2$ , więc  $y = \sqrt{2 - x^2}$  dla  $0 < x < \sqrt{2}$ , gdyż  $y > 0$ . Wówczas nierówność  $x + y \leq 2$  jest równoważna nierówności

$$\begin{aligned}x + \sqrt{2 - x^2} &\leq 2, \\ \sqrt{2 - x^2} &\leq 2 - x.\end{aligned}$$

Obie strony tej nierówności są dodatnie, gdyż  $0 < x < \sqrt{2}$ , więc, podnosząc obie strony nierówności do kwadratu, otrzymujemy nierówność równoważną

$$\begin{aligned}2 - x^2 &\leq 4 - 4x + x^2, \\ 2x^2 - 4x + 2 &\geq 0, \\ x^2 - 2x + 1 &\geq 0, \\ (x - 1)^2 &\geq 0,\end{aligned}$$

która jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ . To kończy dowód.

#### Schemat punktowania VII sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy wyznaczy z równości  $x^2 + y^2 = 2$  jedną z liczb w zależności od drugiej:  $y = \sqrt{2 - x^2}$  dla  $0 < x < \sqrt{2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy zapisze nierówność z jedną niewiadomą, np.  $x^2 + \sqrt{2 - x^2} \leq 2$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

### Przykładowe rozwiązanie

#### VIII sposób

Niech  $x$  i  $y$  będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że  $x^2 + y^2 = 2$ . Stąd otrzymujemy  $y = \sqrt{2 - x^2}$  dla  $0 < x < \sqrt{2}$ , gdyż  $y > 0$ . Do obu stron równania  $x^2 + y^2 = 2$  dodajemy  $2xy$ , otrzymując

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 2xy &= 2 + 2xy, \\ (x + y)^2 &= 2 + 2xy.\end{aligned}$$

Stąd

$$x + y = \sqrt{2 + 2xy} = \sqrt{2 + 2x\sqrt{2 - x^2}} = \sqrt{2 + 2\sqrt{2x^2 - x^4}}.$$

Rozważmy funkcję  $f$  określoną dla  $0 < x < \sqrt{2}$  wzorem  $f(x) = 2 + 2\sqrt{2x^2 - x^4}$ .

Wyznamy największą wartość tej funkcji. Ponieważ funkcja  $y = 2 + 2\sqrt{t}$  jest rosnąca,

więc funkcja  $f$  osiąga największą wartość wtedy i tylko wtedy, gdy największą wartość osiąga funkcja  $g$  określona dla  $0 < x < \sqrt{2}$  wzorem  $g(x) = 2x^2 - x^4$ . Obliczamy pochodną tej funkcji

$$g'(x) = 4x - 4x^3 \text{ dla } 0 < x < \sqrt{2}.$$

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej i badamy jej znak.

Ponieważ  $g'(x) = 4x(1-x)(1+x)$  oraz  $4x(1+x) > 0$  dla każdego  $0 < x < \sqrt{2}$ , więc:

$g'(x) = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $1-x = 0$ , czyli  $x = 1$ ,

$g'(x) > 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $1-x > 0$  i  $0 < x < \sqrt{2}$ , czyli gdy  $0 < x < 1$ ,

$g'(x) < 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $1-x < 0$  i  $0 < x < \sqrt{2}$ , czyli gdy  $1 < x < \sqrt{2}$ .

Zatem w przedziale  $(0,1)$  funkcja  $g$  jest rosnąca, w przedziale  $(1,\sqrt{2})$  jest malejąca, a w punkcie  $x=1$  przyjmuje maksimum lokalne, które jest jednocześnie największą wartością tej funkcji.

Gdy  $x=1$ , to

$$f(1) = 2 + 2\sqrt{2 \cdot 1^2 - 1^4} = 4.$$

Zatem

$$x + y \leq \sqrt{4} = 2,$$

co kończy dowód.

### Schemat punktowania VIII sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy wyznaczy sumę liczb  $x$  i  $y$  w zależności od jednej zmiennej, np.  $x + y = \sqrt{2 + 2x\sqrt{2-x^2}}$  dla  $0 < x < \sqrt{2}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy obliczy miejsca zerowe pochodnej i zbada jej znak, np.:

$$g'(x) = 0 \text{ dla } x = 1, \quad g'(x) > 0 \text{ dla } 0 < x < 1, \quad g'(x) < 0 \text{ dla } 1 < x < \sqrt{2}$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

*Uwagi:*

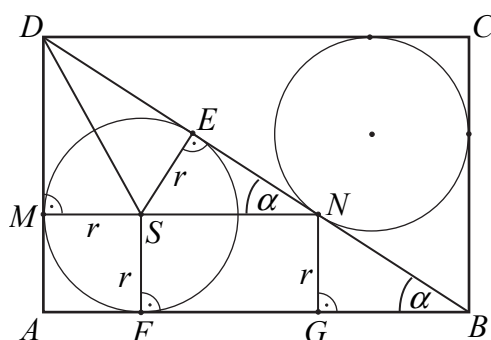
1. Jeżeli zdający jako jedyne uzasadnienie prawdziwości nierówności przywołuje „nierówność Cauchy’ego” i nie zapisuje tej nierówności ani żadnych wniosków płynących z zastosowania tej nierówności, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający, oprócz powołania się na nazwisko Cauchy, zapisze odpowiednią nierówność Cauchy’ego, to przedstawione rozwiązanie jest oceniane tak, jak to przewiduje schemat.
3. Jeżeli zdający nie zapisze koniecznego założenia o możliwych wartościach  $x$  przy wyznaczaniu  $y$  w zależności od  $x$ , to otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.

**Zadanie 9. (0–3)**

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności (R7.4).
--------------------------------	--

**Przykładowe rozwiązania**I sposób

Poprowadźmy promienie  $SE$  i  $SF$  okręgu o środku  $S$  do punktów  $E$  i  $F$  styczności tego okręgu odpowiednio z przekątną  $BD$  i bokiem  $AB$  prostokąta. Niech  $G$  będzie rzutem punktu  $N$  na bok  $AB$ , jak na rysunku.



Wówczas  $|SM| = |SE| = |SF| = |MA| = |NG|$  oraz  $|DE| = |BN|$ .

Trójkąty  $DMS$  i  $DES$  są prostokątne, więc z twierdzenia Pitagorasa dla tych trójkątów otrzymujemy

$$|DM| = \sqrt{|DS|^2 - |SM|^2} = \sqrt{|DS|^2 - |SE|^2} = |DE|.$$

Odcinek  $MN$  jest równoległy do  $AB$ , więc kąty  $GBN$  i  $ENS$  są równe. Trójkąty  $BGN$  i  $NES$  są prostokątne, więc kąty  $BNG$  i  $NSE$  także są równe. To z kolei wraz z równością  $|SE| = |NG|$  oznacza, że trójkąty  $BGN$  i  $NES$  są przystające. Zatem  $|BN| = |NS|$ .

Stąd

$$|MN| = |MS| + |SN| = |MA| + |BN| = |MA| + |DE| = |MA| + |DM| = |AD|.$$

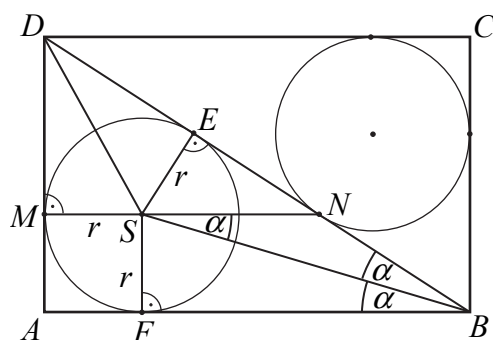
To kończy dowód.

*Uwaga:*

Równość odcinków  $DM$  i  $DE$  wynika też bezpośrednio z twierdzenia o odcinkach stycznych.

## II sposób

Poprowadźmy promienie  $SE$  i  $SF$  okręgu o środku  $S$  do punktów  $E$  i  $F$  styczności tego okręgu odpowiednio z przekątną  $BD$  i bokiem  $AB$  prostokąta. Połączmy punkty  $S$  oraz  $B$ , jak na rysunku.



Wówczas  $|SM| = |SE| = |SF| = |MA|$  oraz  $|DE| = |BN|$ .

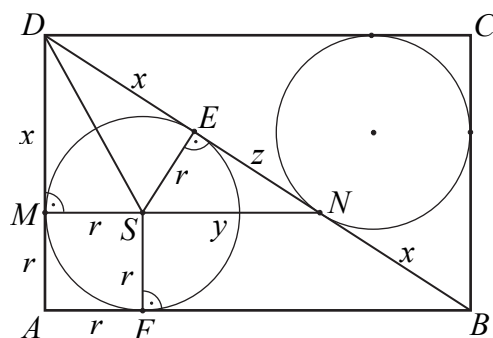
Ponieważ  $|MN| = r + |SN|$  oraz  $|AD| = r + |DM|$ , wystarczy wykazać, że  $|DM| = |SN|$ .

Z przystawiania trójkątów prostokątnych  $BFS$  i  $BES$  (wspólna przeciwprostokątna i równe przyprostokątne  $|SF| = |SE|$ ) otrzymujemy  $|\sphericalangle EBS| = |\sphericalangle FBS| = \alpha$ .

Odcinek  $MN$  jest równoległy do  $AB$ , zatem kąty  $FBS$  i  $NSB$  są równe, jako kąty naprzemianległe, czyli kąty  $NSB$  i  $SBN$  także są równe. Wobec powyższego trójkąt  $BSN$  jest równoramienny i  $|BN| = |NS|$  oraz  $|BN| = |DM|$ , a stąd wynika równość  $|DM| = |SN|$ . To kończy dowód.

## III sposób

Poprowadźmy promienie okręgu o środku  $S$  do punktów  $E$  i  $F$  styczności tego okręgu z bokami  $BD$  i  $AB$  trójkąta  $DAB$ . Niech  $r$  oznacza promień tego okręgu,  $x = |MD|$ ,  $y = |SN|$  i  $z = |EN|$ .



Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że  $|ED| = |MD| = x$ . Trójkąty  $DAB$  i  $CBD$  są przystające, więc  $|NB| = |ED| = x$ . Czworokąt  $AFSM$  jest kwadratem, więc  $|MA| = |AF| = r$ . Ponadto  $|BF| = |BE| = x + z$ .

Trójkąty  $DAB$  i  $DMN$  są podobne (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku  $D$ ). Zatem

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|MD|}{|DN|}, \text{ czyli } \frac{r+x}{2x+z} = \frac{x}{x+z}.$$

Stąd

$$\begin{aligned}(r+x)(x+z) &= (2x+z)x, \\ rx + rz + x^2 + xz &= 2x^2 + xz, \\ (1) \quad z &= \frac{x^2 - rx}{r}.\end{aligned}$$

Z podobieństwa trójkątów  $MDN$  i  $ESN$  (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku  $N$ ) wynika, że

$$\frac{|SE|}{|SN|} = \frac{|MD|}{|DN|}, \text{ czyli } \frac{r}{y} = \frac{x}{x+z}.$$

Stąd i z (1) otrzymujemy

$$y = \frac{r(x+z)}{x} = \frac{rx + r \cdot \frac{x^2 - rx}{r}}{x} = \frac{rx + x^2 - rx}{x} = x.$$

To oznacza, że  $|AD| = r + x = r + y = |MN|$ . To kończy dowód.

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

Zdający

- poprowadzi odcinki  $SE$  i  $NG$
  - albo
  - zapisze równość  $|DM| = |DE|$ ,
  - albo
  - zapisze równość  $|DE| = |BN|$ ,
  - albo
  - zapisze równość  $|SM| = |SE| = |MA| = |NG|$ ,
  - albo
  - zapisze, że trójkąty  $BFS$  i  $BES$  są przystające,
  - albo
  - zapisze proporcję wynikającą z podobieństwa trójkątów  $DAB$  i  $DMN$ :  $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|MD|}{|DN|}$ ,
  - albo
  - zapisze proporcję wynikającą z podobieństwa trójkątów  $MDN$  i  $ESN$ :  $\frac{|SE|}{|SN|} = \frac{|MD|}{|DN|}$ ,
  - albo
  - zauważy, że odcinek  $BS$  jest dwusieczną kąta  $ABD$ ,
  - albo
  - zapisze, że trójkąt  $BNS$  jest równoramienny
- i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**

Zdający

- zapisze, że trójkąty  $BGN$  i  $NES$  są przystające
- albo

- zapisze, że trójkąt  $BSN$  jest równoramienny i  $|BN|=|DM|$ ,

albo

- zapisze proporcje:  $\frac{r+x}{2x+z} = \frac{x}{x+z}$  i  $\frac{r}{y} = \frac{x}{x+z}$ ,

albo

- zauważy, że  $|MN|=r+|SN|$  i  $|EN|=|AB|-|AD|$ ,

albo

- zapisze proporcje:  $\frac{r+x}{r+y+\sqrt{x^2-r^2}} = \frac{x}{r+y}$  i  $\frac{r}{z} = \frac{x}{r+y}$  oraz zapisze równanie

wynikające z twierdzenia Pitagorasa w jednym z trójkątów  $BGN$  i  $ENS$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne** ..... **3 p.**

Zdający wykaże, że  $|MN|=|AD|$ .

#### Zadanie 10. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	4. Funkcje. Zdający wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. także osadzonych w kontekście praktycznym) (4.12).
-----------------------------------	---

#### Przykładowe rozwiązania

##### I sposób

Wyznamy najpierw współrzędne punktu przecięcia. Przyrównujemy  $f(x)$  i  $g(x)$ , a otrzymane równanie zapisujemy w postaci

$$(a+1)x=7.$$

Ponieważ  $x > 0$ , więc  $a+1 > 0$ , czyli  $a > -1$ .

Zatem

$$y = f(x) = \frac{7}{a+1} - 2 = \frac{5-2a}{a+1}.$$

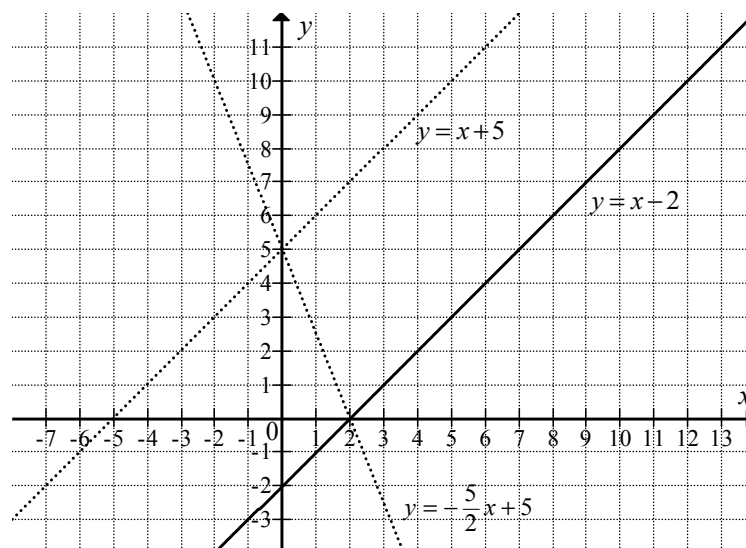
Ponieważ  $y > 0$ , a ponadto  $a+1 > 0$ , więc wynika stąd, że  $5-2a > 0$ , skąd otrzymujemy

$$a < \frac{5}{2}.$$

Łączymy oba warunki  $x > 0$  i  $y > 0$  i zapisujemy odpowiedź: punkt przecięcia wykresów funkcji ma obie współrzędne dodatnie dla  $-1 < a < \frac{5}{2}$ .

## II sposób

Zilustrujmy w układzie współrzędnych sytuację opisaną w treści zadania.



Ponieważ równanie  $y = -ax + 5$  opisuje pęk prostych przechodzących przez punkt o współrzędnych  $(0, 5)$ , więc rysując proste o równaniach  $y = x + 5$  oraz  $y = -\frac{5}{2}x + 5$  (linie przerywane) otrzymujemy graniczne położenia linii prostych należących do tego pęku – prosta o równaniu  $y = x + 5$  nie ma żadnego punktu wspólnego z prostą o równaniu  $y = x - 2$ , natomiast prosta o równaniu  $y = -\frac{5}{2}x + 5$  ma jeden punkt wspólny z prostą o równaniu  $y = x - 2$ , jest nim punkt  $(2, 0)$ , którego współrzędne nie spełniają warunku określonego w treści tego zadania.

Zapisujemy odpowiedź: Punkty przecięcia wykresów funkcji mają dwie dodatnie współrzędne wtedy i tylko wtedy, gdy  $-1 < a < \frac{5}{2}$ .

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

Zdający wyznaczy jedną ze współrzędnych punktu przecięcia w zależności od  $a$  oraz zapisze:

- $x = \frac{7}{a+1}$

albo

- $y = \frac{7}{a+1} - 2$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2 p.**

Zdający

- wyznaczy obie współrzędne punktu przecięcia w zależności od  $a$  i zapisze:  $x = \frac{7}{a+1}$   
i  $y = \frac{5-2a}{a+1}$  dla  $a \neq -1$

albo

- wyznaczy pierwszą współrzędną punktu przecięcia w zależności od  $a$ :  $x = \frac{7}{a+1}$   
i zapisze, że druga współrzędna jest dodatnia, gdy  $x > 2$  (o ile wynika to z przywołanej koniunkcji  $x > 0 \wedge x > 2$ ),

albo

- zapisze, że  $x > 0$ , gdy  $a > -1$  i nie wyznaczy drugiej współrzędnej punktu przecięcia,

albo

- sporządzi ilustrację graficzną jednej pary prostych o równaniach:  $y = x - 2$  i  $y = x + 5$   
lub  $y = x - 2$  i  $y = -\frac{5}{2}x + 5$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.**

Zdający:

- zapisze, że dla  $a > -1$  spełniona jest nierówność  $x > 0$  i wyznaczy drugą współrzędną

albo

- zapisze, że dla  $-1 < a < \frac{5}{2}$  spełniona jest nierówność  $y > 0$  i nie rozważy warunku  $x > 0$ ,

albo

- sporządzi ilustrację graficzną, na której znajdą się proste o równaniach:

$$y = x + 5 \quad \text{i} \quad y = -\frac{5}{2}x + 5 \quad \text{i} \quad y = x - 2$$

oraz zapisze przynajmniej jedną poprawną nierówność, którą spełnia współczynnik  $a$ ,

albo

- sporządzi ilustrację graficzną prostej o równaniu:  $y = x - 2$  i pęku prostych przechodzących przez punkt o współrzędnych  $(0, 5)$  oraz zapisze przynajmniej jedną poprawną nierówność, którą spełnia współczynnik  $a$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający zapisze, że dla  $-1 < a < \frac{5}{2}$  obie współrzędne punktu przecięcia są dodatnie.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający podstawia do równania pęku prostych współrzędne punktu  $(0, 2)$ , otrzymuje  $a = \frac{5}{2}$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy, to otrzymuje **1 punkt**. Jeśli dodatkowo poda, że  $a < \frac{5}{2}$ , to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający przedstawia rysunek, na którym jest tylko prosta o równaniu  $y = x - 2$ , i odpowiedź  $a \in \left(-1, \frac{5}{2}\right)$  bez żadnych wyjaśnień, to otrzymuje **1 punkt**.

### Zadanie 11. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne oraz posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych (R6.6, R6.4).
-----------------------------------	--

#### Przykładowe rozwiązanie

Ponieważ  $\cos^2 x \geq 0$  dla każdego  $x$ , to nierówność  $\frac{2 \cos x - \sqrt{3}}{\cos^2 x} < 0$  jest równoważna koniunkcji  $2 \cos x - \sqrt{3} < 0$  i  $\cos x \neq 0$ , czyli  $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$  i  $\cos x \neq 0$ .

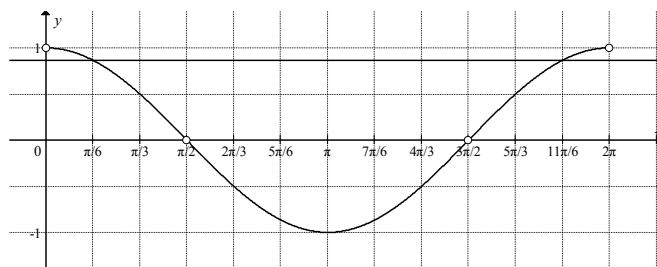
Zatem  $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą, i  $x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$ , gdzie  $m$  jest liczbą całkowitą.

W przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$  rozwiązaniem tej nierówności jest każda liczba

$$x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right).$$

Uwaga:

Nierówności  $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$  i  $\cos x \neq 0$  możemy rozwiązać, np. odczytując odpowiednie argumenty funkcji  $f(x) = \cos x$ , dla których przyjmuje ona wartości mniejsze od  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  i różne od zera.



Funkcja cosinus przyjmuje w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$  wartość  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  dla dwóch argumentów:  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = \frac{11\pi}{6}$ . Ma również w tym przedziale dwa miejsca zerowe:  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{3\pi}{2}$ .

Zatem zbiorem rozwiązań nierówności  $\frac{2 \cos x - \sqrt{3}}{\cos^2 x} < 0$  w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$  jest suma przedziałów

$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right).$$

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

Zdający zapisze, że nierówność  $\cos^2 x (2 \cos x - \sqrt{3}) < 0$  jest równoważna koniunkcji  $\cos^2 x \neq 0$  i  $2 \cos x - \sqrt{3} < 0$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający

- zapisze, że  $\cos^2 x \neq 0$  dla  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą

albo

- zapisze, że  $\cos^2 x \neq 0$  dla  $x \neq \frac{\pi}{2}$  i  $x \neq \frac{3\pi}{2}$  lub  $\cos x \neq 0$  dla  $x \neq \frac{\pi}{2}$  i  $x \neq \frac{3\pi}{2}$ ,

albo

- rozwiąże nierówność  $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$  w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right), \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą,}$$

albo

- rozwiąże nierówność  $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$  w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$ :  $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.**

Zdający zapisze, że  $\cos^2 x \neq 0$  dla  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą oraz rozwiąże

nierówność  $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$  w zbiorze liczb rzeczywistych:  $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający rozwiąże nierówność  $\cos^2 x (2 \cos x - \sqrt{3}) < 0$  w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$ :

$$x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right) \text{ lub } x \in (30^\circ, 90^\circ) \cup (90^\circ, 270^\circ) \cup (270^\circ, 330^\circ).$$

*Uwagi:*

1. Zdający nie musi podawać rozwiązań ogólnych. Na każdym etapie rozwiązania może ograniczyć rozumowanie do przedziału  $\langle 0, 2\pi \rangle$ .
2. Jeżeli zdający zapisze, że  $\cos^2 x \neq 0$  i podaje zbiór rozwiązań nierówności w postaci  $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$  lub  $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$ , to za całe rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający poda wszystkie rozwiązania równania  $\cos x = 0$  w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$  lub wszystkie rozwiązania równania  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy, to otrzymuje **1 punkt**.
4. Jeżeli zdający zapisze warunek  $\cos x \neq 0$  i poda tylko  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  lub  $x \neq \frac{\pi}{2}$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy, to otrzymuje **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej  $\cos^2 x (2 \cos x - \sqrt{3}) < 0$ , wykona podstawienie  $t = \cos x$ , a następnie rozwiązując nierówność  $t^2 \left(t - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0$  przyjmując, że 0 jest pierwiastkiem jednokrotnym wielomianu i konsekwentnie rozwiąże nierówność do końca, otrzymując  $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right)$ , to otrzymuje **2 punkty**.

### Zadanie 12. (0–6)

III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje wzory Viète'a, rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem, rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą oraz równania i nierówności z wartością bezwzględną (R3.1, R3.2, 3.5, R3.9).
--------------------------------	--

#### Przykładowe rozwiązanie

Rozwiązanie zadania dzielimy na cztery etapy. W pierwszym etapie wyznaczymy wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których trójmian  $f$  ma dwa różne pierwiastki. W drugim, wyznaczymy te wartości parametru  $m$ , dla których pierwiastki trójmianu spełniają warunek  $|x_1 - x_2| < 3$ . W trzecim wyznaczamy te wartości parametru  $m$ , dla których pierwiastki  $x_1, x_2$  są tego samego znaku. W czwartym – końcowym etapie, wyznaczymy wszystkie szukane wartości parametru  $m$ .

#### I etap

Ponieważ trójmian  $f$  ma dwa różne pierwiastki, więc wyróżnik  $\Delta$  tego trójmianu jest dodatni, zatem

$$\Delta = (2(m+1))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (6m+1) > 0.$$

Nierówność  $(2(m+1))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (6m+1) > 0$  przekształcamy w sposób równoważny

$$4(m^2 + 2m + 1) - 4 \cdot (6m + 1) > 0,$$

$$m^2 + 2m + 1 - 6m - 1 > 0,$$

$$m^2 - 4m > 0,$$

$$m(m-4) > 0.$$

Rozwiązaniem tej nierówności jest każda liczba  $m \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ .

#### II etap

##### I sposób

Nierówność  $|x_1 - x_2| < 3$  można zapisać, stosując wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego, w postaci

$$\left| \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right| < 3,$$

$$\left| \frac{-\sqrt{\Delta}}{a} \right| < 3,$$

$$\left| \frac{-\sqrt{\Delta}}{1} \right| < 3,$$

$$\sqrt{\Delta} < 3.$$

Ponieważ  $\Delta > 0$ , więc  $\sqrt{\Delta} > 0$ . Zatem obie strony nierówności są dodatnie. Stąd  $0 < \Delta < 9$ . Zatem

$$4(m^2 + 2m + 1) - 4(6m + 1) - 9 < 0,$$

$$4m^2 - 16m - 9 < 0,$$

$$m \in \left( -\frac{1}{2}, \frac{9}{2} \right).$$

## II sposób

Obie strony nierówności  $|x_1 - x_2| < 3$  są dodatnie, więc podnosząc je do kwadratu, otrzymujemy nierówność równoważną

$$(x_1 - x_2)^2 < 9.$$

Tę nierówność możemy z kolei zapisać w postaci

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 < 9.$$

Ze wzorów Viète'a otrzymujemy nierówność z niewiadomą  $m$ :

$$4(m^2 + 2m + 1) - 4(6m + 1) - 9 < 0,$$

$$m \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right).$$

## III etap

Ponieważ pierwiastki  $x_1, x_2$  są tego samego znaku, więc  $x_1 \cdot x_2 > 0$ . Ze wzoru Viète'a, otrzymujemy nierówność

$$\frac{6m+1}{1} > 0, \text{ skąd } m > -\frac{1}{6}.$$

## IV etap

Wyznaczamy część wspólną zbiorów:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{6}, +\infty\right), \\ & \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right), \\ & (-\infty, 0) \cup (4, +\infty). \end{aligned}$$

$$\text{Ostatecznie } m \in \left(-\frac{1}{6}, 0\right) \cup \left(4, \frac{9}{2}\right).$$

## Schemat punktowania

Rozwiązanie zadania składa się z czterech etapów.

- **Pierwszy** z nich polega na rozwiązaniu nierówności  $\Delta > 0$ :

$$m \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty).$$

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

- **Drugi** etap polega na rozwiązaniu nierówności  $|x_1 - x_2| < 3$ . Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

**1 punkt** zdający otrzymuje, gdy:

- zapisze nierówność  $|x_1 - x_2| < 3$  w postaci  $|\sqrt{-\Delta}| < 3$  lub  $|\sqrt{\Delta}| < 3$ , lub  $(x_1 - x_2)^2 < 9$

albo

- zapisze nierówność  $|x_1 - x_2| < 3$  w postaci:  $\left| \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right| < 3$   $\Delta < 9$  lub

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 < 9.$$

**2 punkty** zdający otrzymuje, gdy zapisze nierówność z jedną niewiadomą  $m$ , np.

$$\left(-\frac{2(m+1)}{1}\right)^2 - 4 \cdot \frac{6m+1}{1} < 9$$

**3 punkty** zdający otrzymuje za rozwiązanie tej nierówności:  $m \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$ .

- **Trzeci etap** polega na ustaleniu, dla jakich  $m$  pierwiastki trójmianu są tego samego znaku.

**1 punkt** zdający otrzymuje za rozwiązanie nierówności  $\frac{6m+1}{1} > 0$ :  $m \in \left(-\frac{1}{6}, +\infty\right)$ .

- **Czwarty etap** polega na ustaleniu, dla których wartości parametru  $m$  pierwiastki trójmianu spełniają wszystkie warunki zadania. Wyznaczamy część wspólną zbiorów:  $\left(-\frac{1}{6}, +\infty\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$  i  $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ .

Za ten etap zdający może otrzymać **1 punkt**, gdy:

- poprawnie wykonał przynajmniej dwa etapy spośród I, II i III, a ponadto w każdym z etapów otrzymał niepusty i różny od zbioru liczb rzeczywistych ( $R$ ) zbiór rozwiązań

albo

- poprawnie wykonał etapy I lub III i otrzymał co najmniej 2 punkty za II etap, a ponadto w każdym z etapów otrzymał niepusty i różny od zbioru liczb rzeczywistych ( $R$ ) zbiór rozwiązań.

*Uwaga:*

Jeżeli zdający popełni błąd merytoryczny w trakcie rozwiązywania warunku  $|\sqrt{\Delta}| < 3$  lub  $|\sqrt{\Delta}| < 3$ , np. podniesie obie strony nierówności do kwadratu i otrzyma  $\Delta > 9$ , to za II etap otrzymuje co najwyżej **1 punkt**.

### Zadanie 13. (0–5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt, oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych oraz wyznacza współrzędne środka odcinka (8.3, 8.4, 8.5).
-----------------------------------	--

#### Przykładowe rozwiązanie

Zauważamy, że jeżeli  $AC$  jest przekątną czworokąta  $ABCD$ , wpisanego w okrąg i prosta  $AC$  jest osią symetrii tego czworokąta, to ten czworokąt jest deltoidem, a trójkąty  $ABC$  i  $ADC$  są prostokątne. Obliczymy najpierw współrzędne wierzchołka  $D$ , który jest obrazem wierzchołka  $B$ , w symetrii osiowej względem prostej  $AC$ . Ponieważ prosta  $BD$  jest prostopadła do prostej  $AC$  i przechodzi przez punkt  $B$ , więc jej równanie ma postać

$$y = -x + 8.$$

Obliczamy współrzędne środka  $S$  przekątnej  $BD$ . Ponieważ jest to punkt przecięcia prostych  $AC$  i  $BD$ , więc wystarczy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x + 8 \end{cases}$$

Otrzymujemy stąd  $x = 3$  i  $y = 5$ . Zatem punkt  $S$  ma współrzędne  $S = (3, 5)$ . Współrzędne punktu  $D$  spełniają zatem równania

$$\frac{x_D + 0}{2} = 3 \quad \text{i} \quad \frac{y_D + 8}{2} = 5.$$

Stąd wynika, że  $x_D = 6$  i  $y_D = 2$ , czyli  $D = (6, 2)$ .

Obliczymy teraz współrzędne wierzchołka  $C$ . Zauważamy, że jest to punkt przecięcia prostych  $AC$  i prostej  $CD$ , która jest prostopadła do prostej  $AD$  i przechodzi przez punkt  $D$ .

Ponieważ współczynnik kierunkowy prostej  $AD$  jest równy  $\frac{2-32}{6-30} = \frac{5}{4}$ , więc prosta  $CD$  ma równanie postaci

$$y = -\frac{4}{5}(x-6) + 2.$$

Rozwiązujemy układ równań  $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -\frac{4}{5}(x-6) + 2 \end{cases}$  i otrzymujemy  $\begin{cases} x = \frac{24}{9} = \frac{8}{3} \\ y = \frac{42}{9} = \frac{14}{3} \end{cases}$ .

Zatem  $C = \left(\frac{8}{3}, \frac{14}{3}\right)$ .

#### Schemat punktowania

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch części. Pierwsza, to obliczenie współrzędnych punktu  $D$ , druga, to obliczenie współrzędnych punktu  $C$ . Mogą być one wykonane niezależnie od siebie, w dowolnej kolejności. Za pierwszą część rozwiązania zdający otrzymuje **2 punkty**, a za drugą **3 punkty**.

### Schemat punktowania pierwszej części

**1 punkt** przyznajemy zdającemu, który wyznaczy równanie prostej  $BD$ :  $y = -x + 8$  i zapisze, że punkt przecięcia prostych  $AC$  i  $BD$  jest środkiem odcinka  $BD$  lub wykorzysta ten fakt.

**2 punkty** przyznajemy zdającemu za obliczenie współrzędnych punktu  $D$ :  $D = (6, 2)$ .

### Schemat punktowania drugiej części

**1 punkt** przyznajemy zdającemu, który zapisze, że trójkąt  $ADC$  jest trójkątem prostokątnym lub wykorzysta ten fakt.

**2 punkty** przyznajemy zdającemu za wyznaczenie równania prostej  $CD$ :  $y = -\frac{4}{5}(x - 6) + 2$ .

**3 punkty** przyznajemy zdającemu za obliczenie współrzędnych punktu  $C$ :  $C = (\frac{8}{3}, \frac{14}{3})$ .

*Uwaga:*

Współrzędne punktu  $C$  zdający może obliczać inaczej. Poniżej schematy przydziału 3 punktów za obliczenie współrzędnych wierzchołka  $C$ .

- W przypadku obliczenia w pierwszej kolejności współrzędnych środka okręgu opisanego na danym czworokącie, który jest środkiem odcinka  $AC$ .

**1 punkt** – gdy zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą opisujące zależność  $|SA|^2 = |SB|^2$ ,

**2 punkty** – gdy zdający obliczy współrzędne punktu  $S$ ,

**3 punkty** – gdy zdający obliczy współrzędne punktu  $C$ .

- W przypadku obliczenia współrzędnych punktu  $C$ , z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa w trójkącie  $ABC$ .

**1 punkt** – gdy zdający zauważy, że trójkąt  $ABC$  jest prostokątny, np. zapisze  $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$ ,

**2 punkty** – gdy zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, wynikające z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie  $ABC$ ,

**3 punkty** – gdy zdający obliczy współrzędne punktu  $C$ .

- W przypadku obliczenia współrzędnych punktu  $C$ , z wykorzystaniem symetralnej odcinka  $AB$  i środka okręgu opisanego na czworokącie  $ABCD$ .

**1 punkt** – gdy zdający zapisze równanie symetralnej odcinka  $AB$ ,

**2 punkty** – gdy zdający wyznaczy współrzędne środka okręgu przechodzącego przez punkty  $A, B, C, D$ ,

**3 punkty** – gdy zdający obliczy współrzędne punktu  $C$ .

- W przypadku obliczenia współrzędnych punktu  $C$ , z wykorzystaniem kąta pomiędzy prostymi  $AD$  i  $AB$ .

**1 punkt** – gdy zdający obliczy tangens kąta  $DAB$ ,

**2 punkty** – gdy zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą z wykorzystaniem współczynników kierunkowych prostych  $BC$  i  $CD$  jako tangensów odpowiednich kątów,

**3 punkty** – gdy zdający obliczy współrzędne punktu  $C$ .

- W przypadku obliczenia współrzędnych punktu  $C$ , z wykorzystaniem iloczynu skalarnego wektorów  $BC$  i  $BA$  (albo, po wyznaczeniu współrzędnych punktu  $D$ , wektorów  $DA$  i  $DC$ ).
  - 1 punkt** – gdy zdający zapisze, że wektory  $BC$  i  $BA$  albo  $DA$  i  $DC$  są prostopadłe lub wyznaczy ich współrzędne,
  - 2 punkty** – gdy zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą wynikające z zerowania się iloczynu skalarnego wektorów,
  - 3 punkty** – gdy zdający obliczy współrzędne punktu  $C$ .
- W przypadku obliczenia współrzędnych punktu  $C$ , z wykorzystaniem równania okręgu przechodzącego przez punkty  $A, B, D$ .
  - 1 punkt** – gdy zdający zapisze układ trzech równań z trzema niewiadomymi, z którego można obliczyć współczynniki w równaniu okręgu,
  - 2 punkty** – gdy zdający wyznaczy równanie okręgu opisanego na trójkącie  $ABD$ ,
  - 3 punkty** – gdy zdający obliczy współrzędne punktu  $C$ .
- W przypadku obliczenia współrzędnych punktu  $C$ , z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów.
  - 1 punkt** – gdy zdający wyznaczy cosinus kąta  $BAD$ ,
  - 2 punkty** – gdy zdający zastosuje twierdzenie cosinusów w trójkącie  $BCD$  i zapisze równanie z jedną niewiadomą,
  - 3 punkty** – gdy zdający obliczy współrzędne punktu  $C$ .
- W przypadku obliczenia współrzędnych punktu  $C$ , z wykorzystaniem twierdzenia o wysokości w trójkącie prostokątnym  $ABC$  (albo, po wyznaczeniu współrzędnych punktu  $D$ , w trójkącie  $ACD$ ).
  - 1 punkt** – gdy zdający wyznaczy długości odcinków  $AS$  i  $BS$ , lub  $AS$  i  $DS$ , gdzie  $S$  jest spodkiem wysokości trójkąta należącym do boku  $AC$ ,
  - 2 punkty** – gdy zdający zastosuje twierdzenie o wysokości w trójkącie prostokątnym i zapisze równanie z jedną niewiadomą,
  - 3 punkty** – gdy zdający obliczy współrzędne punktu  $C$ .

### Zadanie 14. (0–3)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych (R10.1).
--------------------------------	--

#### Przykładowe rozwiązania

##### I sposób

Miejsce dla cyfry 1 wybieramy na  $\binom{10}{3}$  sposobów. Na pozostałych siedmiu miejscach rozmieszczamy cyfry 2 lub 3 w dowolnym porządku na  $2^7$  sposobów. Stosujemy regułę mnożenia i otrzymujemy

$$\binom{10}{3} \cdot 2^7 = 120 \cdot 128 = 15360$$

różnych liczb dziesięciocyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje w dokładnie trzy razy.

##### II sposób

Rozpatrzmy trzy rozłączne przypadki, w zależności od tego, jaka cyfra została zapisana na pierwszym miejscu.

1. Jeżeli na pierwszym miejscu jest cyfra 1, to miejsce dla pozostałych dwóch jedynek wybieramy na  $\binom{9}{2}$  sposobów, na pozostałych siedmiu miejscach rozmieszczamy cyfrę 2 lub cyfrę 3 w dowolnym porządku na  $2^7$  sposobów. Stosujemy regułę mnożenia i otrzymujemy

$$1 \cdot \binom{9}{2} \cdot 2^7 = 36 \cdot 128 = 4608$$

liczb dziesięciocyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje w dokładnie trzy razy, przy czym na pierwszym miejscu jest cyfra 1.

2. jeżeli na pierwszym miejscu jest cyfra 2, to miejsce dla trzech jedynek wybieramy na  $\binom{9}{3}$  sposobów, na pozostałych sześciu miejscach rozmieszczamy cyfrę 2 lub cyfrę 3 w dowolnym porządku na  $2^6$  sposobów. Stosujemy regułę mnożenia i otrzymujemy

$$1 \cdot \binom{9}{3} \cdot 2^6 = 84 \cdot 64 = 5376$$

liczb dziesięciocyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje w dokładnie trzy razy, przy czym na pierwszym miejscu jest cyfra 2.

3. (rozumowanie analogiczne jak w p. 2.). Jeżeli na pierwszym miejscu jest cyfra 3, to miejsce dla trzech jedynek wybieramy na  $\binom{9}{3}$  sposobów, na pozostałych sześciu miejscach rozmieszczamy cyfrę 2 lub cyfrę 3 w dowolnym porządku na  $2^6$  sposobów.

Stosujemy regułę mnożenia i otrzymujemy

$$1 \cdot \binom{9}{3} \cdot 2^6 = 84 \cdot 64 = 5376$$

liczb dziesięciocyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje w dokładnie trzy razy, przy czym na pierwszym miejscu jest cyfra 3.

Sumujemy liczby powstałe w każdym z trzech przypadków i otrzymujemy:

$$4608 + 2 \cdot 5376 = 15360$$

liczb dziesięciocyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy.

### III sposób

Rozpatrzmy osiem rozłącznych przypadków, wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy:

1. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki i 7 trójek, wtedy takich liczb jest  $\frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$ ,
2. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 1 dwójka i 6 trójek, wtedy takich liczb jest  $\frac{10!}{3! \cdot 6!} = 840$ ,
3. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 2 dwójki i 5 trójek, wtedy takich liczb jest  $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 5!} = 2520$ ,
4. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 3 dwójki i 4 trójki, wtedy takich liczb jest  $\frac{10!}{3! \cdot 3! \cdot 4!} = 4200$ ,
5. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 4 dwójki i 3 trójki, wtedy takich liczb jest  $\frac{10!}{3! \cdot 4! \cdot 3!} = 4200$ ,
6. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 5 dwójek i 2 trójki, wtedy takich liczb jest  $\frac{10!}{3! \cdot 5! \cdot 2!} = 2520$ ,
7. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 6 dwójek i 1 trójka, wtedy takich liczb jest  $\frac{10!}{3! \cdot 6!} = 840$ ,
8. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki i 7 dwójek, wtedy takich liczb jest  $\frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$ .

Sumujemy liczby otrzymane w każdym przypadku i otrzymujemy:

$$2 \cdot (120 + 840 + 2520 + 4200) = 2 \cdot 7680 = 15360$$

różnych liczb dziesięciocyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy.

### **Schemat punktowania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 p.**

Zdający zapisze, że:

- miejsce dla cyfry 1 można wybrać na  $\binom{10}{3}$  sposobów

albo

- miejsca dla cyfr 2 lub 3 można wybrać na  $\binom{10}{7}$  sposobów,

albo

- cyfry 2 lub 3 można rozmieścić na  $2^7$  sposobów,

albo

- jeżeli cyfra 1 jest na ustalonym (np. pierwszym) miejscu, to pozostałe dwie cyfry 1 można rozmieścić na  $\binom{9}{2}$  sposobów,

albo

- jeżeli na ustalonym miejscu stoi jedna z cyfr 2 lub 3, to trzy cyfry 1 można rozmieścić na  $\binom{9}{3}$  sposobów,

albo

- jeżeli cyfry 1 stoją na ustalonych trzech miejscach, to jeśli w liczbie występuje  $n$  cyfr 2, to cyfry 2 i 3 można rozmieścić na  $\binom{7}{n}$  sposobów dla przynajmniej jednej konkretnej liczby  $n$ ,

albo

- jest 8 rozłącznych przypadków wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**  
Zdający

- zapisze, że liczba rozpatrywanych liczb dziesięciocyfrowych jest równa np.  $\binom{10}{3} \cdot 2^7$

albo

- zapisze, ile jest liczb w każdym z rozpatrywanych przypadków wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy,

albo

- zapisze osiem rozłącznych przypadków wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy oraz w przynajmniej jednym przypadku zapisze liczbę takich liczb, np.  $\binom{10}{3} \cdot 1$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 p.**  
Zdający

- zapisze, że jest  $\binom{10}{3} \cdot 2^7 = 15360$  liczb dziesięciocyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy

albo

- zsumuje liczby otrzymane w każdym z rozpatrywanych przypadków wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy i zapisze, że jest ich 15360.

*Uwagi:*

1. Rozwiązanie uznajemy za pełne, jeżeli zdający zapisze liczbę rozpatrywanych liczb dziesięciocyfrowych bez użycia symbolu Newtona.
2. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu przedstawia zapisy, dla których brak bezpośredniej interpretacji kombinatorycznej i zapisom tym nie towarzyszą stosowne objaśnienia, to nie może otrzymać maksymalnej liczby punktów, przy czym za rozwiązanie, zawierające

- jedynie zapisy pojedynczych liczb lub symboli Newtona (typu  $120$ ,  $128$ ,  $\binom{10}{7}$ ), bez stosownych objaśnień, zdający otrzymuje **0 punktów**, a za rozwiązanie, zawierające jedynie zapisy działań na liczbach (typu  $120 \cdot 128 = 15360$ ), bez stosownych objaśnień zdający może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający przedstawia rozwiązanie, w którym części zapisanych liczb lub działań na liczbach nie towarzyszą stosowne objaśnienia, to za takie rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
4. Zdający może skorzystać ze wzoru dwumianowego Newtona i zapisać:

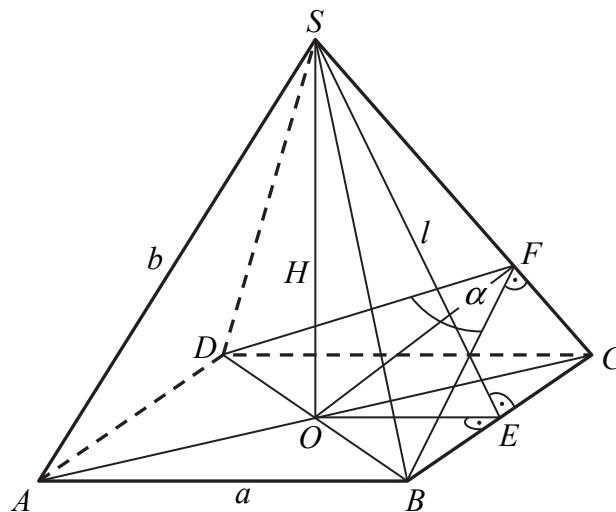
$$\binom{10}{3} \cdot \left\{ \binom{7}{7} + \binom{7}{6} + \binom{7}{5} + \binom{7}{4} + \binom{7}{3} + \binom{7}{2} + \binom{7}{1} + \binom{7}{0} \right\} = \binom{10}{3} \cdot 2^7 = 120 \cdot 128 = 15360.$$

**Zadanie 15. (0–6)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastoslupach i ostrosłupach kąty między ścianami, stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.4, 9.6).
-----------------------------------	--

**Przykładowe rozwiązanie**

Strategię rozwiązania zadania można zrealizować na wiele sposobów. Każdy z nich różni się zestawem i kolejnością zastosowanych związków między odcinkami w ostrosłupie. Przyjmijmy następujące oznaczenia jak na rysunku.



Wtedy  $|OB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ,  $|OE| = \frac{a}{2}$ ,  $|\sphericalangle BFO| = 60^\circ$ .

Ponieważ trójkąt  $BFO$  jest prostokątny, stąd  $\frac{|BO|}{|BF|} = \sin 60^\circ$ . Zatem

$$|BF| = \frac{|BO|}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Trójkąty  $SEC$  i  $BFC$  są podobne, stąd  $\frac{|SE|}{|SC|} = \frac{|BF|}{|BC|}$ , czyli  $\frac{l}{b} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a}$ . Zatem  $l = \frac{b\sqrt{6}}{3}$ .

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkątach prostokątnych  $EOS$  i  $BOS$ , skąd otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b\sqrt{6}}{3}\right)^2 \\ H^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b\sqrt{6}}{3}\right)^2 \\ 25 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25 + \frac{a^2}{4} = \frac{2b^2}{3} \\ 25 + \frac{a^2}{2} = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 300 + 3a^2 = 8b^2 \\ 50 + a^2 = 2b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 = 75 \\ a^2 = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 5\sqrt{3} \\ a = 10 \end{cases}$$

Stąd pole  $P$  podstawy  $ABCD$  ostrosłupa jest równe  $P = a^2 = 100$ , więc objętość ostrosłupa jest równa:  $V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 5 = \frac{500}{3}$ .

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

Zdający

- zastosuje twierdzenie Pitagorasa w trójkącie  $SOC$
- albo
- zastosuje twierdzenie Pitagorasa w trójkącie  $SOE$ ,
- albo
- zastosuje twierdzenie cosinusów w trójkącie  $BFD$ ,
- albo
- zapisze funkcję trygonometryczną kąta ostrego w trójkącie  $OBF$ ,
- albo
- zapisze proporcję wynikającą z podobieństwa trójkątów  $SEC$  i  $BCF$ ,
- albo
- zapisze proporcję wynikającą z podobieństwa trójkątów  $SOC$  i  $OFC$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

*Uwaga:*

Jeżeli zdający zapisze związki, z których można obliczyć długość krawędzi podstawy lub długość przekątnej podstawy ostrosłupa, ale pominie jedno równanie potrzebne do zakończenia obliczeń, to otrzymuje **2 punkty**.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 3 p.  
 Zdający zapisze układ równań, z którego można obliczyć długość krawędzi podstawy lub długość przekątnej podstawy ostrosłupa i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 4 p.  
 Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą oznaczającą wielkość, która pozwala obliczyć pole podstawy ostrosłupa i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie prawie pełne** ..... 5 p.

Zdający

- obliczy długość krawędzi podstawy lub długość przekątnej podstawy ostrosłupa albo
- obliczy długość krawędzi podstawy lub długość przekątnej podstawy ostrosłupa, popełniając błędy rachunkowe i konsekwentnie do tego obliczy objętość ostrosłupa.

**Rozwiązanie pełne** ..... 6 p.

Zdający obliczy objętość ostrosłupa:  $V = \frac{500}{3}$ .

*Uwagi:*

1. Jeżeli zdający rozpatruje inną bryłę, np. ostrosłup, którego podstawą nie jest kwadrat albo ostrosłup, którego ściany boczne są trójkątami równobocznymi, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający błędnie interpretuje kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi, ale przy korzystaniu z własności figur, w których ten kąt nie występuje, wykazuje się innymi umiejętnościami matematycznymi, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający odczyta wartość  $\sin \sphericalangle BFO = \sin 60^\circ$  z tablic i wykona obliczenia na przybliżeniach, to otrzymuje co najwyżej **5 punktów**.

**Zadanie 16. (0–7)**

III. Modelowanie matematyczne.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych (R11.6).
--------------------------------	--

**Przykładowe rozwiązanie**

Niech  $C = (x, y)$  będzie wierzchołkiem trapezu  $ABCD$ . Wówczas  $C = (x, 2 - \frac{1}{2}x^2)$ , gdzie  $0 < x < 2$ . Ponieważ  $|AB| = 4$ ,  $|CD| = 2x$ , a wysokość trapezu jest równa  $h = 2 - \frac{1}{2}x^2$ , więc pole  $P$  tego trapezu określone jest wzorem

$$P(x) = \frac{4+2x}{2} \cdot (2 - \frac{1}{2}x^2) = (x+2) \cdot \frac{1}{2}(4 - x^2) = \frac{1}{2}(8 + 4x - 2x^2 - x^3) = 4 + 2x - x^2 - \frac{1}{2}x^3$$

dla każdej liczby rzeczywistej  $0 < x < 2$ .

Pochodna funkcji  $P(x) = 4 + 2x - x^2 - \frac{1}{2}x^3$  jest równa  $P'(x) = 2 - 2x - \frac{3}{2}x^2$  dla  $x \in (0, 2)$ .

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej i badamy jej znak.

$$\text{Ponieważ } P'(x) = -\frac{3}{2}\left(x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}\right) = -\frac{3}{2}\left(\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}\right) = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + 2)$$

oraz  $-\frac{3}{2}(x+2) < 0$  dla każdego  $x \in (0, 2)$ , więc:

$P'(x) = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = \frac{2}{3}$ ,

$P'(x) > 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x - \frac{2}{3} < 0$  i  $x \in (0, 2)$ , czyli dla  $x \in (0, \frac{2}{3})$ ,

$P'(x) < 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x - \frac{2}{3} > 0$  i  $x \in (0, 2)$ , czyli dla  $x \in (\frac{2}{3}, 2)$ .

Zatem w przedziale  $(0, \frac{2}{3})$  funkcja  $P$  jest rosnąca, w przedziale  $(\frac{2}{3}, 2)$  jest malejąca,

a w punkcie  $x = \frac{2}{3}$  osiąga maksimum. Jeżeli  $x = \frac{2}{3}$ , to  $C = (\frac{2}{3}, 2 - \frac{1}{2} \cdot (\frac{2}{3})^2) = (\frac{2}{3}, \frac{16}{9})$ .

*Uwaga:*

Zdający może zauważyć, że z nierówności dla średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej wynika, że dla  $x \in (0, 2)$  iloczyn

$$(x+2)(4-x^2) = (x+2)(x+2)(2-x) = 4\left(\frac{x}{2}+1\right)\left(\frac{x}{2}+1\right)(2-x)$$

przyjmuje największą wartość równą

$$4\left(\frac{\frac{x}{2}+1+\frac{x}{2}+1+2-x}{3}\right)^3 = 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3, \text{ gdy } \frac{x}{2}+1 = 2-x, \text{ czyli dla } x = \frac{2}{3}.$$

Takie rozumowanie zastępuje drugi etap rozwiązania.

### Schemat punktowania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

- **Pierwszy** etap składa się z trzech części:

a) zapisanie długości podstawy  $CD$  i wysokości trapezu  $ABCD$  w zależności od zmiennej  $x$ :  $|CD| = 2x$ ,  $h = 2 - \frac{1}{2}x^2$ ,

b) zapisanie pola trapezu  $ABCD$  jako funkcji zmiennej  $x$ :  $P(x) = \frac{4+2x}{2} \cdot (2 - \frac{1}{2}x^2)$  lub

$$P(x) = 4 + 2x - x^2 - \frac{1}{2}x^3,$$

c) określenie dziedziny funkcji  $P$ :  $(0, 2)$ .

Za każdą część tego etapu zdający otrzymuje po **1 punkcie**, przy czym, jeżeli zdający od razu zapisze poprawnie pole trapezu w zależności od jednej zmiennej, to otrzymuje punkt za część a) i punkt za część b).

- **Drugi** etap składa się z trzech części:

a) wyznaczenie pochodnej funkcji wielomianowej  $f(x) = 4 + 2x - x^2 - \frac{1}{2}x^3$ :

$$f'(x) = 2 - 2x - \frac{3}{2}x^2,$$

b) obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji  $P$ :  $x = \frac{2}{3}$  lub pochodnej funkcji  $f$ :

$$x = -2, x = \frac{2}{3},$$

- c) zbadanie znaku pochodnej funkcji  $P$  i uzasadnienie, że dla  $x = \frac{2}{3}$  funkcja  $P$  osiąga wartość największą.

*Uwaga:*

Znak pochodnej zdający może zaznaczyć w inny sposób, np. na rysunku szkicując krzywą zbliżoną do wykresu pochodnej.

- **Trzeci etap.**

Obliczenie współrzędnych wierzchołka  $C$  tego z rozpatrywanych trapezów, którego pole jest największe:

$$C = \left(\frac{2}{3}, \frac{16}{9}\right).$$

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

*Uwagi:*

1. Jeżeli zdający zapisze pole trapezu  $P$  z pominięciem czynnika  $\frac{1}{2}$ , we wzorze na pole trapezu, lub z błędem rachunkowym, to może otrzymać co najwyżej **6 punktów**.
2. Jeżeli zdający zapisze pole trapezu  $P$  z błędem rzeczowym, innym niż opisany w uwadze 1., to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie, a jeżeli dodatkowo wyznaczy dziedzinę funkcji  $P$ , to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający obliczy pochodną funkcji  $P$  z błędem rachunkowym i otrzyma jako  $P'$  funkcję liniową albo funkcję kwadratową o ujemnym wyróżniku  $\Delta$  lub o wyróżniku  $\Delta$  równym 0, to może otrzymać punkty jedynie za I etap rozwiązania.
4. Jeżeli zdający poprawnie wyznaczy pochodną  $P'$  i współrzędne punktu  $C$ , ale nie poda poprawnego uzasadnienia, dotyczącego istnienia największej wartości funkcji  $P$  dla obliczonych współrzędnych, to może otrzymać co najwyżej **5 punktów**.