CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy**
Formy arkusza:	MMAP-P0-100, MMAP-P0-200, MMAP-P0-300, MMAP-P0-400, MMAP-P0-600, MMAP-P0-700, MMAP-P0-Q00, MMAP-P0-K00, MMAU-P0-100
Termin egzaminu:	20 sierpnia 2024 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.7) […] rozwiązuje równania i nierówności typu: […] $\lvert x-2\rvert < 3$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (Dz.U. 2022, poz.1246).

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.1) wykonuje działania ([…] potęgowanie […]) w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 3. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych.

Zasady oceniania
2 pkt – przekształcenie wyrażenia $(2n+5)^2+3$ do postaci $4(n^2+5n+7)$
ALBO
– przekształcenie wyrażenia $(2n+5)^2+3$ do postaci $4n^2+20n+28$ **oraz** zapisanie, że składniki $4n^2$, $20n$, 28 są podzielne przez 4,
ALBO
– przekształcenie wyrażenia $(2n+5)^2+3$ do postaci $(2n+4)(2n+6)+4$ **oraz** zapisanie, że liczba $(2n+4)(2n+6)$ jest podzielna przez 4 jako iloczyn dwóch liczb parzystych.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $(2n+5)^2+3$ do postaci $4n^2+20n+25+3$
ALBO
– przekształcenie wyrażenia $(2n+5)^2+3$ do postaci $(2n+4)(2n+6)+4$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość tezy tylko dla wybranych wartości n, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający przyjmuje np. $n = 4k + r$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ i r jest resztą z dzielenia liczby n przez 4 (lub $n = 2k + r$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ i r jest resztą z dzielenia liczby n przez 2), i przeprowadzi pełne rozumowanie dla wszystkich przypadków, to otrzymuje **2 punkty**.

Gdy przeprowadzi pełne rozumowanie dla co najmniej połowy przypadków, ale nie przeprowadzi pełnego rozumowania dla wszystkich przypadków, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający rozpatruje tylko jeden przypadek $n = 4k$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy równoważnie dane wyrażenie

$$(2n + 5)^2 + 3 = 4n^2 + 20n + 25 + 3 = 4n^2 + 20n + 28 = 4(n^2 + 5n + 7)$$

Ponieważ n jest liczbą naturalną, więc $n^2 + 5n + 7$ jest liczbą naturalną.
Zatem liczba $(2n + 5)^2 + 3 = 4(n^2 + 5n + 7)$ jest podzielna przez 4.
To należało wykazać.

Sposób II

Przekształcamy równoważnie dane wyrażenie

$$(2n + 5)^2 + 3 = (2n + 5)^2 - 1 + 4 = (2n + 5 - 1)(2n + 5 + 1) + 4$$
$$= (2n + 4)(2n + 6) + 4$$

Ponieważ n jest liczbą naturalną, więc liczby $2n + 4$ oraz $2n + 6$ są parzyste. Stąd wynika, że iloczyn $(2n + 4)(2n + 6)$ jest liczbą podzielną przez 4.
Zatem suma $(2n + 4)(2n + 6) + 4$ dwóch liczb podzielnych przez 4 jest podzielna przez 4.
To należało wykazać.

Zadanie 4. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.1) wykonuje działania ([…] logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych; I.9) […] posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zasady oceniania
2 pkt – wybranie dwóch odpowiedzi, z których obie są poprawne.
1 pkt – wybranie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których jedna jest poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
CE

Zadanie 5. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 6. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.6) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 7. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: III.5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów […] takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej […] metodą grupowania.

Zasady oceniania
3 pkt – poprawna metoda rozwiązania równania i obliczenie wszystkich rozwiązań równania:
(-5), $(-\sqrt{2})$, $\sqrt{2}$.

2 pkt – przekształcenie lewej strony równania do postaci iloczynu wielomianów stopnia co najwyżej drugiego **oraz** rozwiązanie jednego z równań wynikającego z tego rozkładu, np.:
$(x+5)(x^2-2)=0$ i $x=-5$,
$(x+5)(x^2-2)=0$ i $x=-\sqrt{2}$ oraz $x=\sqrt{2}$
ALBO
– przekształcenie równania $x^3+5x^2-2x-10=0$ do postaci alternatywy dwóch równań: kwadratowego i liniowego **oraz** rozwiązanie jednego z nich, np.:
$(x+5=0,\ x^2-2=0)$ oraz $x=-5$,
$(x+5=0,\ x^2-2=0)$ oraz $(x=-\sqrt{2},\ x=\sqrt{2})$,
ALBO

– rozłożenie wielomianu $W(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 10$ na czynniki liniowe:
$W(x) = (x+5)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$,
ALBO
– przekształcenie równania $x^3 + 5x^2 - 2x - 10 = 0$ do postaci alternatywy trzech równań liniowych: $(x+5=0,\ x-\sqrt{2}=0,\ x+\sqrt{2}=0)$,
ALBO
– obliczenie jednego z pierwiastków wielomianu $W(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 10$ **oraz** poprawne podzielenie wielomianu W przez odpowiedni dwumian, np.
$x = -5$ i $(x^3 + 5x^2 - 2x - 10) : (x+5) = x^2 - 2$.

1 pkt – zapisanie wielomianu $W(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 10$ w postaci iloczynu wielomianów stopnia co najwyżej drugiego, np. $W(x) = (x+5)(x^2-2)$
ALBO
– przekształcenie równania $x^3 + 5x^2 - 2x - 10 = 0$ do postaci alternatywy dwóch równań: $(x+5=0,\ x^2-2=0)$,
ALBO
– przekształcenie równania $x^3 + 5x^2 - 2x - 10 = 0$ do postaci
$x^2(x+5) - 2(x+5) = 0$ lub do postaci $x^2(x+5) = 2(x+5)$, lub do postaci
$x(x^2-2) = -5(x^2-2)$ **oraz** zapisanie rozwiązania $x = -5$,
ALBO
– zapisanie jednego z rozwiązań równania $x^3 + 5x^2 - 2x - 10 = 0$ **oraz** zapisanie sprawdzenia, że ta liczba spełnia to równanie.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze tylko trzy poprawne rozwiązania równania, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający uzyska trzy poprawne pierwiastki wielomianu, lecz traktuje równanie jako nierówność (podaje zbiór rozwiązań w postaci przedziału / sumy przedziałów), to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli przy przekształcaniu lewej strony równania do postaci iloczynu zdający zapisuje czynnik $(x+5)$ z wykładnikiem 2, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (**1 punkt** za rozwiązanie równania $(x+5)^2 = 0$ i **1 punkt** za rozwiązanie równania $x^2 - 2 = 0$).

4. Jeżeli zdający zamiast równania $(x+5)(x^2-2) = 0$ zapisze $(x+5) \pm (x^2-2) = 0$, ale z dalszego rozwiązania wynika, że traktuje lewą stronę równania jak iloczyn i rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (**1 punkt** za rozwiązanie równania $x+5=0$ i **1 punkt** za rozwiązanie równania $x^2-2=0$).

5. Jeżeli zdający przy przekształcaniu równania do postaci $(x+5)(x^2-2) = 0$ popełni błąd i zapisze:
$x^2(x-5) - 2(x+5) = 0$
lub
$x^2(x+5) + 2(x+5) = 0$
lub

$x^2(x+5) - 2(x-5) = 0$
lub
$x(x^2+2) + 5(x^2-2) = 0$
lub
$x(x^2-2) - 5(x^2-2) = 0$
lub
$x(x^2-2) + 5(x^2+2) = 0$
a następnie:

5.1. zapisze równanie $(x+5)(x^2-2) = 0$ lub poprawną alternatywę ($x+5=0$ lub $x^2-2=0$) i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (**1 punkt** za rozwiązanie równania $x+5=0$ i **1 punkt** za rozwiązanie równania $x^2-2=0$).

5.2. zapisze równanie $(x+5)(x^2+2) = 0$ lub błędną alternatywę ($x+5=0$ lub $x^2+2=0$) i rozwiąże poprawnie równanie $x+5=0$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

5.3. zapisze równanie $(x-5)(x^2-2) = 0$ lub błędną alternatywę ($x-5=0$ lub $x^2-2=0$) i rozwiąże poprawnie równanie $x^2-2=0$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

5.4. zapisze błędne równanie (w którym jedna ze stron jest równa 0, a druga jest iloczynem wielomianów stopni dodatnich), inne niż w uwagach 5.2 oraz 5.3, np. $(x-5)(x+5)(x^2 \pm 2) = 0$ lub błędną alternatywę inną niż w uwagach 5.2 oraz 5.3, np. ($x-5=0$ lub $x+5=0$ lub $x^2 \pm 2 = 0$), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

6. Jeżeli zdający, przekształcając równanie $x^3+5x^2-2x-10=0$, popełni jeden błąd (który nie jest błędem znaku) albo dwa błędy znaku i otrzyma równanie trzeciego stopnia, które ma trzy rozwiązania rzeczywiste, oraz konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

7. Jeżeli zdający dzieli obustronnie równanie $x^2(x+5) = 2(x+5)$ przez dwumian $(x+5)$ z podaniem odpowiedniego założenia i uzyska tylko dwa poprawne rozwiązania $x=\sqrt{2}$ oraz $x=-\sqrt{2}$, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie, a jeżeli uzyska tylko jedno z tych rozwiązań, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

8. Jeżeli zdający dzieli obustronnie równanie $x^2(x+5) = 2(x+5)$ przez dwumian $(x+5)$ bez podania odpowiedniego założenia i uzyska tylko dwa poprawne rozwiązania $x=\sqrt{2}$ oraz $x=-\sqrt{2}$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie, a jeżeli uzyska tylko jedno z tych rozwiązań, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy równanie równoważnie i stosujemy metodę grupowania wyrazów:

$$x^3+5x^2-2x-10=0$$

$$x^2(x+5) - 2(x+5) = 0$$

$$(x+5)(x^2-2) = 0$$

$$(x+5)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)=0$$

$$x+5=0 \quad \text{lub} \quad x-\sqrt{2}=0 \quad \text{lub} \quad x+\sqrt{2}=0$$

$$x=-5 \quad \text{lub} \quad x=\sqrt{2} \quad \text{lub} \quad x=-\sqrt{2}$$

Rozwiązaniami równania są liczby: (-5), $\left(-\sqrt{2}\right)$, $\sqrt{2}$.

Sposób II

Przekształcamy równanie równoważnie i stosujemy metodę grupowania wyrazów:

$$x^3+5x^2-2x-10=0$$

$$x(x^2-2)+5(x^2-2)=0$$

$$(x+5)(x^2-2)=0$$

$$(x+5)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)=0$$

$$x+5=0 \quad \text{lub} \quad x-\sqrt{2}=0 \quad \text{lub} \quad x+\sqrt{2}=0$$

$$x=-5 \quad \text{lub} \quad x=\sqrt{2} \quad \text{lub} \quad x=-\sqrt{2}$$

Rozwiązaniami równania są liczby: (-5), $\left(-\sqrt{2}\right)$, $\sqrt{2}$.

Sposób III

Obliczamy $W(-5)=0$ i stwierdzamy, że liczba (-5) jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)=x^3+5x^2-2x-10$.

Zatem wielomian W jest podzielny przez dwumian $(x+5)$. Dzielimy wielomian W przez dwumian $(x+5)$ i otrzymujemy

$$(x^3+5x^2-2x-10):(x+5)=x^2-2$$

Zatem $W(x)=(x+5)(x^2-2)=(x+5)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$.

Obliczamy pierwiastki wielomianu W:

$$(x+5)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)=0$$

$$x+5=0 \quad \text{lub} \quad x-\sqrt{2}=0 \quad \text{lub} \quad x+\sqrt{2}=0$$

$$x=-5 \quad \text{lub} \quad x=\sqrt{2} \quad \text{lub} \quad x=-\sqrt{2}$$

Rozwiązaniami równania są liczby: (-5), $\left(-\sqrt{2}\right)$, $\sqrt{2}$.

Zadanie 8. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: IV.1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 9. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel […].

Zasady oceniania
2 pkt – dwie poprawne odpowiedzi.
1 pkt – jedna poprawna odpowiedź.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D
C

Zadanie 10. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej; V.11) wykorzystuje własności funkcji liniowej […] do interpretacji zagadnień geometrycznych […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
$\frac{1}{2}$

Zadanie 11.1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego […]; V.3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji […]; V.11) wykorzystuje własności funkcji liniowej […] do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
FP

Zadanie 11.2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego […]; V.3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji […]; V.11) wykorzystuje własności funkcji liniowej […] do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 11.3. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego […]; V.6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 12.1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: […] zbiór wartości […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 12.2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.11) wykorzystuje własności funkcji […] kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 12.3. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 2. Używanie języka matematycznego do tworzenia tekstów matematycznych, w tym do opisu prowadzonych rozumowań i uzasadniania wniosków, a także do przedstawiania danych.	Zdający: V.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji […] o jej wykresie.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 13. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym; VI.4) stosuje wzór […] na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 14. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.5) stosuje wzór na n-ty wyraz […] ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 15. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.2) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący; VI.6) wykorzystuje własności ciągów […] arytmetycznych […] do rozwiązywania zadań […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A2

Zadanie 16. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 17. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.4) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 18. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.4) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty m.in. z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 19. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 20. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda i obliczenie długości odcinka BE: $|BE| = 20$.

1 pkt – obliczenie długości odcinka DE: $|DE| = 8$

ALBO

– obliczenie długości odcinka AE: $|AE| = 16$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający zapisze tylko $|BE| = 20$ albo stosując błędną metodę, uzyskuje $|BE| = 20$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Trójkąty ABE oraz DCE są podobne na podstawie cechy kąt – kąt – kąt podobieństwa trójkątów. Stąd

$$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|CD|}$$

$$\frac{|AE|}{12} = \frac{24 - |AE|}{6}$$

$$|AE| = 48 - 2|AE|$$

$$3|AE| = 48$$

$$|AE| = 16$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i obliczamy długość odcinka BE:

$$|BE|^2 = |AB|^2 + |AE|^2$$

$$|BE|^2 = 12^2 + 16^2$$

$$|BE|^2 = 400$$

$$|BE| = 20$$

Sposób II

Trójkąty ABE jest podobny do trójkąta DCE (na podstawie cechy kąt – kąt – kąt podobieństwa trójkątów) w skali $k = \frac{12}{6} = 2$.
Stąd $|AE| = 2|DE|$.

Obliczamy długość odcinka AE:

$$|AD| = 24$$

$$|AE| + |DE| = 24$$

$$2|DE| + |DE| = 24$$

$$3|DE| = 24$$

$$|DE| = 8$$

$$|AE| = 2|DE| = 16$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i obliczamy długość odcinka BE:

$$|BE|^2 = |AB|^2 + |AE|^2$$

$$|BE|^2 = 12^2 + 16^2$$

$$|BE|^2 = 400$$

$$|BE| = 20$$

Zadanie 21. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.1) […] znajduje wspólny punkt dwóch prostych […]; IX.2) posługuje się równaniem prostej na płaszczyźnie w postaci kierunkowej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład [...] równoległość […] do innej prostej […]).

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia współrzędnych punktu B **oraz** podanie poprawnego wyniku: $B = (6, 2)$.

3 pkt – wyznaczenie równania prostej BC: $y = 2x - 10$

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktu D: $D = (12, 20)$,

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktu A: $A = (2, 0)$ **oraz** obliczenie współrzędnych środka M_{AB} boku AB: $M_{AB} = (4, 1)$,

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktu C: $C = (16, 22)$ **oraz** obliczenie współrzędnych środka M_{BC} boku BC: $M_{BC} = (11, 12)$,

ALBO

– zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć jedną ze współrzędnych punktu B, np.:

$$\frac{x_b + x_d}{2} = 9 \quad \text{oraz} \quad \frac{\frac{1}{2}x_b - 1 + 2x_d - 4}{2} = 11,$$

$$\frac{x_b + x_d}{2} = 9 \quad \text{oraz} \quad \frac{y_b + y_d}{2} = 11 \quad \text{oraz} \quad y_b = \frac{1}{2}x_b - 1 \quad \text{oraz} \quad y_d = 2x_d - 4.$$

2 pkt – obliczenie współrzędnych punktu C: $C = (16, 22)$

ALBO

– obliczenie współrzędnych środka M_{AB} boku AB: $M_{AB} = (4, 1)$,

ALBO

– obliczenie współrzędnych środka M_{BC} boku BC: $M_{BC} = (11, 12)$,

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktu A: $A = (2, 0)$ **oraz** wyznaczenie równania prostej SM_{AB} (gdzie M_{AB} jest środkiem boku AB): $y = 2x - 7$,

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktu A: $A = (2, 0)$ **oraz** obliczenie współrzędnych środka M_{AD} boku AD: $M_{AD} = (7, 10)$,
ALBO
– zapisanie zależności pomiędzy odpowiednimi współrzędnymi punktów B, D oraz S: $\frac{x_b + x_d}{2} = 9$ oraz $\frac{y_b + y_d}{2} = 11$ **oraz** zapisanie współrzędnych punktu B w zależności od jednej zmiennej (x_b lub y_b), np. $B = \left(x_b, \frac{1}{2}x_b - 1\right)$,
ALBO
– zapisanie zależności pomiędzy odpowiednimi współrzędnymi punktów B, D oraz S: $\frac{x_b + x_d}{2} = 9$ oraz $\frac{y_b + y_d}{2} = 11$ **oraz** zapisanie współrzędnych punktu D w zależności od jednej zmiennej (x_d lub y_d), np. $D = (x_d, 2x_d - 4)$,
ALBO
– zapisanie współrzędnych punktu B w zależności od jednej zmiennej (x_b lub y_b) **oraz** zapisanie współrzędnych punktu D w zależności od jednej zmiennej (x_d lub y_d), np. $B = \left(x_b, \frac{1}{2}x_b - 1\right)$ **oraz** $D = (x_d, 2x_d - 4)$.

1 pkt – obliczenie współrzędnych punktu A: $A = (2, 0)$
ALBO
– wyznaczenie równania prostej SM_{AB} (gdzie M_{AB} jest środkiem odcinka AB): $y = 2x - 7$,
ALBO
– obliczenie współrzędnych środka M_{AD} boku AD: $M_{AD} = (7, 10)$,
ALBO
– zapisanie zależności pomiędzy odpowiednimi współrzędnymi punktów B, D oraz S: $\frac{x_b + x_d}{2} = 9$ oraz $\frac{y_b + y_d}{2} = 11$,
ALBO
– zapisanie współrzędnych punktu B w zależności od jednej zmiennej, np. $B = \left(x_b, \frac{1}{2}x_b - 1\right)$,
ALBO
– zapisanie współrzędnych punktu D w zależności od jednej zmiennej, np. $D = (x_d, 2x_d - 4)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

a) zastosowanie niepoprawnego wzoru na współczynnik kierunkowy prostej
b) zastosowanie niepoprawnego związku między współczynnikami kierunkowymi prostych równoległych
c) zastosowanie niepoprawnego wzoru na współrzędne środka odcinka,

i rozwiązanie zostanie doprowadzone konsekwentnie do końca, to zdający może otrzymać **2 punkty** za całe rozwiązanie. Jeżeli zdający popełni więcej niż jeden z wymienionych błędów a)–c), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Punkt A jest punktem wspólnym prostych AB i AD, zatem współrzędne tego punktu są rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 1 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

Stąd

$$2x - 4 = \frac{1}{2}x - 1$$

$$\frac{3}{2}x = 3$$

$$x = 2$$

$$y = 0$$

Zatem $A = (2, 0)$.

Punkt S jest środkiem odcinka AC, więc

$$\frac{2 + x_c}{2} = 9 \quad \text{oraz} \quad \frac{0 + y_c}{2} = 11$$

$$x_c = 16 \quad \text{oraz} \quad y_c = 22$$

Zatem $C = (16, 22)$.

Prosta BC jest równoległa do prostej AD, zatem współczynnik kierunkowy prostej BC jest równy 2. Wyznaczamy równanie prostej BC:

$$y = 2(x - 16) + 22$$

$$y = 2x - 10$$

Punkt B jest punktem wspólnym prostych AB i BC, zatem współrzędne tego punktu są rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 1 \\ y = 2x - 10 \end{cases}$$

Stąd

$$2x - 10 = \frac{1}{2}x - 1$$

$$\frac{3}{2}x = 9$$

$$x = 6$$

$$y = 2$$

Zatem $B = (6, 2)$.

Sposób II

Punkt A jest punktem wspólnym prostych AB i AD, zatem współrzędne tego punktu są rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 1 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

Stąd

$$2x - 4 = \frac{1}{2}x - 1$$

$$\frac{3}{2}x = 3$$

$$x = 2$$

$$y = 0$$

Zatem $A = (2,0)$.

Oznaczmy przez M_{AB} środek odcinka AB. Prosta SM_{AB} jest równoległa do prostej AD, zatem współczynnik kierunkowy prostej SM_{AB} jest równy 2.
Wyznaczamy równanie prostej SM_{AB}:

$$y = 2(x - 9) + 11$$

$$y = 2x - 7$$

Punkt M_{AB} jest punktem wspólnym prostych AB i SM_{AB}, zatem współrzędne tego punktu są rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 1 \\ y = 2x - 7 \end{cases}$$

Stąd

$$2x - 7 = \frac{1}{2}x - 1$$

$$\frac{3}{2}x = 6$$

$$x = 4$$

$$y = 1$$

Zatem $M_{AB} = (4, 1)$.

Punkt M_{AB} jest środkiem odcinka AB, więc

$$\frac{2 + x_b}{2} = 4 \quad \text{oraz} \quad \frac{0 + y_b}{2} = 1$$

$$x_b = 6 \quad \text{oraz} \quad y_b = 2$$

Zatem $B = (6, 2)$.

Sposób III

Punkt B leży na prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x - 1$, stąd $y_b = \frac{1}{2}x_b - 1$.

Punkt D leży na prostej o równaniu $y = 2x - 4$, stąd $y_d = 2x_d - 4$.

Punkt S jest środkiem odcinka BD, więc

$$\frac{x_b + x_d}{2} = 9 \quad \text{oraz} \quad \frac{y_b + y_d}{2} = 11$$

Zatem

$$\frac{x_b + x_d}{2} = 9 \quad \text{oraz} \quad \frac{\frac{1}{2}x_b - 1 + 2x_d - 4}{2} = 11$$

$$x_b + x_d = 18 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{2}x_b + 2x_d = 27$$

$$x_d = 18 - x_b \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{2}x_b + 2(18 - x_b) = 27$$

Stąd otrzymujemy

$$-\frac{3}{2}x_b = -9$$

$$x_b = 6$$

$$y_b = \frac{1}{2}x_b - 1 = \frac{1}{2} \cdot 6 - 1 = 2$$

Zatem $B = (6, 2)$.

Zadanie 22. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.2) posługuje się równaniem prostej na płaszczyźnie w postaci kierunkowej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład [...] równoległość […] do innej prostej […]).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 23. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 24. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: XI.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 25. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: X.4) oblicza […] pola powierzchni graniastosłupów […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 26. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: X.3) rozpoznaje w graniastosłupach […] kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi), oblicza miary tych kątów. VIII.11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 27. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XI.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 28. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: XII.2) oblicza średnią arytmetyczną […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 29. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia A i uzyskanie poprawnego wyniku: $P(A) = \frac{4}{15}$.

1 pkt – wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych lub obliczenie/podanie liczby tych zdarzeń: $|\Omega| = 5 \cdot 3$, lub sporządzenie tabeli o 15 polach odpowiadających zdarzeniom elementarnym, z których co najmniej jedno pole jest wypełnione, lub sporządzenie pełnego drzewa stochastycznego

ALBO

– wypisanie (lub zaznaczenie w tabeli) wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i niewypisanie żadnego niewłaściwego,

ALBO

– podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 4$, o ile nie zostały zliczone błędne pary,

ALBO

– sporządzenie fragmentu drzewa stochastycznego, który zawiera wszystkie gałęzie sprzyjające zdarzeniu A **oraz** zapisanie prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów doświadczenia,

ALBO

– podanie prawdopodobieństwa jednoelementowego zdarzenia (elementarnego): $\frac{1}{15}$,

ALBO

– zapisanie tylko $P(A) = \frac{4}{15}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający zapisuje tylko liczby 4 lub 15 i z rozwiązania nie wynika znaczenie tych liczb, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane pary liczb (x, y), gdzie $x \in \{0, 4, 5, 7, 9\}$ oraz $y \in \{1, 2, 3\}$.
Liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych obliczamy, korzystając z reguły mnożenia.
Moc zbioru Ω jest równa $5 \cdot 3 = 15$.
Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne: $(7,3), (9,1), (9,2), (9,3)$, więc moc zbioru A jest równa 4.
Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $\frac{4}{15}$.

Sposób II

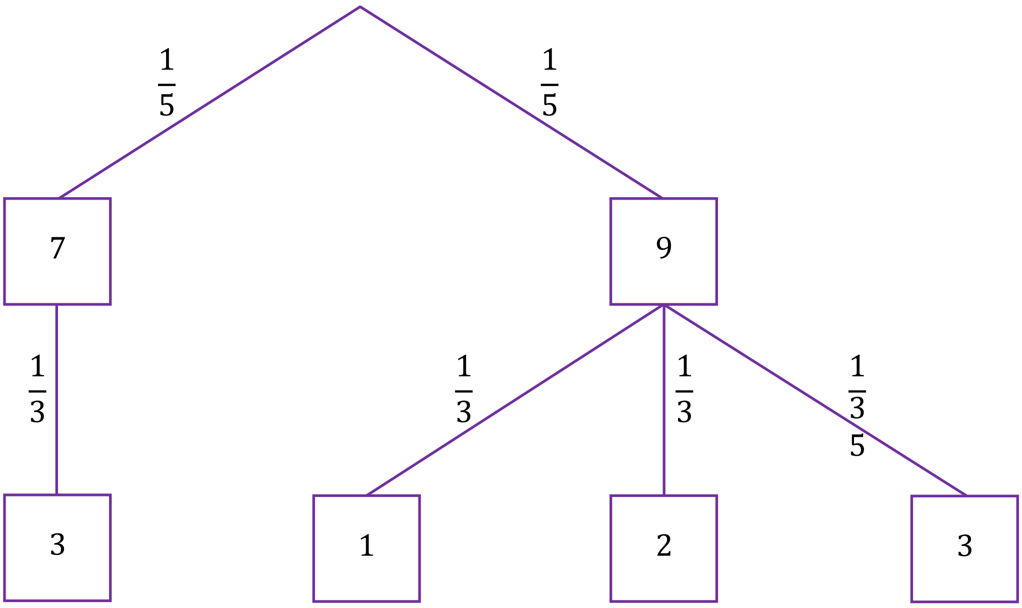
W tabeli literą A zaznaczamy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A (pary liczb, których suma jest liczbą większą od 9).

D \ C	0	4	5	7	9
1					A
2					A
3				A	A

Moc zbioru Ω jest równa 15.
Zdarzeń sprzyjających wylosowaniu liczb, których suma jest większa od 9, jest 4.
Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $\frac{4}{15}$.

Sposób III (drzewo stochastyczne)

Rysujemy fragment drzewa stochastycznego rozważanego doświadczenia z uwzględnieniem wszystkich istotnych gałęzi.



Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$$

Zadanie 30. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XIII) rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x = 4$, $y = 8$, najmniejsza wartość wyrażenia $2x^2 + y^2$ jest równa 96.

2 pkt – zapisanie poprawnego wzoru opisującego wyrażenie $2x^2 + y^2$ jako funkcję zmiennej x, np. $f(x) = 2x^2 + (12 - x)^2$ **oraz** obliczenie argumentu, dla którego ta funkcja przyjmuje wartość najmniejszą: $x = 4$

ALBO

– zapisanie poprawnego wzoru opisującego wyrażenie $2x^2 + y^2$ jako funkcję zmiennej x, np. $f(x) = 2x^2 + (12 - x)^2$ **oraz** obliczenie wartości najmniejszej tej funkcji: 96,

ALBO

– zapisanie poprawnego wzoru opisującego wyrażenie $2x^2 + y^2$ jako funkcję zmiennej y, np. $f(y) = 2(12 - y)^2 + y^2$ **oraz** obliczenie argumentu, dla którego ta funkcja przyjmuje wartość najmniejszą: $y = 8$,

ALBO

– zapisanie poprawnego wzoru opisującego wyrażenie $2x^2 + y^2$ jako funkcję zmiennej y, np. $f(y) = 2(12 - y)^2 + y^2$ **oraz** obliczenie wartości najmniejszej tej funkcji: 96.

1 pkt – zapisanie poprawnego wzoru opisującego wyrażenie $2x^2 + y^2$ jako funkcję jednej zmiennej, np.: $f(x) = 2x^2 + (12 - x)^2$, $f(y) = 2(12 - y)^2 + y^2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze poprawnie wyrażenie $2x^2 + y^2$ jako funkcję f jednej zmiennej i otrzyma wartość pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli zawierającej wykres funkcji f, która leży poza przedziałem $[0, 12]$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie (za zapisanie wzoru funkcji jednej zmiennej).

2. Jeżeli zdający zapisze poprawnie wyrażenie $2x^2 + y^2$ jako funkcję f jednej zmiennej, a następnie obliczy wartości tej funkcji dla pierwszej współrzędnej wierzchołka i dwóch argumentów leżących symetrycznie względem pierwszej współrzędnej wierzchołka, i nie odwoła się do własności wykresu funkcji kwadratowej, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający nie zapisze poprawnie wyrażenia $2x^2 + y^2$ jako funkcji f jednej zmiennej, a jedynie obliczy wartości wyrażenia $2x^2 + y^2$ dla wybranych par liczb x oraz y i na tej podstawie wskazuje najmniejszą wartość wyrażenia $2x^2 + y^2$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

4. Jeżeli zdający oblicza najmniejszą wartość funkcji f, korzystając z rachunku różniczkowego, i nie uzasadni, że w punkcie będącym miejscem zerowym pochodnej funkcji f jest najmniejsza wartość funkcji f, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Za poprawne uzasadnienie, że w punkcie będącym miejscem zerowym pochodnej funkcji f jest najmniejsza wartość funkcji f, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej (np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku, np. znakami „+” i „-”, znak pochodnej) **oraz**:

– opisuje (słownie lub graficznie - np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji f

LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonego miejsca zerowego pochodnej, funkcja f ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość,

LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonego miejsca zerowego pochodnej, funkcja f ma minimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Ponieważ $x + y = 12$, więc $y = 12 - x$.

Wyrażenie $2x^2 + y^2$ zapisujemy jako funkcję f jednej zmiennej x. W tym celu podstawiamy $y = 12 - x$ i otrzymujemy

$$f(x) = 2x^2 + (12 - x)^2 = 2x^2 + 144 - 24x + x^2 = 3x^2 - 24x + 144$$

Wyznaczamy dziedzinę funkcji f. Z warunków zadania wynika, że

$$x \geq 0 \quad \text{i} \quad y \geq 0$$

Zatem

$$x \geq 0 \quad \text{oraz} \quad 12 - x \geq 0$$

$$x \geq 0 \quad \text{oraz} \quad x \leq 12$$

Zmienna x może przyjmować wartości z przedziału $[0, 12]$.

Wykresem funkcji f jest fragment paraboli skierowanej ramionami do góry.
Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli:

$$p = -\frac{-24}{2 \cdot 3} = 4 \in [0, 12]$$

Zatem funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą dla argumentu 4.
Wobec tego wartość wyrażenia $2x^2 + y^2$ jest najmniejsza dla $x = 4$ oraz $y = 12 - 4 = 8$.

Obliczamy najmniejszą wartość wyrażenia $2x^2 + y^2$:

$$f(4) = 3 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 144 = 96$$

Sposób II

Ponieważ $x + y = 12$, więc $x = 12 - y$.

Wartość wyrażenia $2x^2 + y^2$ zapisujemy jako funkcję f jednej zmiennej y. W tym celu podstawiamy $x = 12 - y$ i otrzymujemy

$$f(y) = 2(12 - y)^2 + y^2 = 2(144 - 24y + y^2) + y^2 = 288 - 48y + 2y^2 + y^2$$

$$f(y) = 3y^2 - 48y + 288$$

Wyznaczamy dziedzinę funkcji f. Z warunków zadania wynika, że

$$x \geq 0 \quad \text{i} \quad y \geq 0$$

Zatem

$$12 - y \geq 0 \quad \text{oraz} \quad y \geq 0$$

$$y \leq 12 \quad \text{oraz} \quad y \geq 0$$

Zmienna y może przyjmować wartości z przedziału $[0, 12]$.

Wykresem funkcji f jest fragment paraboli skierowanej ramionami do góry.
Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli:

$$p = -\frac{-48}{2 \cdot 3} = 8 \in [0, 12]$$

Zatem funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą dla argumentu 8.
Wobec tego wartość wyrażenia $2x^2 + y^2$ jest najmniejsza dla $y = 8$ oraz $x = 12 - 8 = 4$.

Obliczamy najmniejszą wartość wyrażenia $2x^2 + y^2$:

$$f(8) = 3 \cdot 8^2 - 48 \cdot 8 + 288 = 96$$

Ocena prac osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Obowiązują zasady oceniania stosowane przy sprawdzaniu prac zdających bez stwierdzonej dyskalkulii z dodatkowym uwzględnieniem:

I. **ogólnych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią (punkty 1.–12.);

II. dodatkowych **szczegółowych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią – egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, termin poprawkowy 2024.

I. **Ogólne zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

1. Nie należy traktować jako błędy merytoryczne pomyłek, wynikających z:
   - błędnego przepisania
   - przestawienia cyfr
   - zapisania innej cyfry, ale o podobnym wyglądzie
   - przestawienia położenia przecinka
   - przestawienia położenia znaku liczby.
2. W przypadku błędów, wynikających ze zmiany znaku liczby, należy w każdym zadaniu oddzielnie przeanalizować, czy zdający opanował inne umiejętności, poza umiejętnościami rachunkowymi, oceniane w zadaniu. W przypadku opanowania badanych umiejętności zdający powinien otrzymać przynajmniej 1 punkt.
3. We wszystkich zadaniach otwartych, w których wskazano poprawną metodę rozwiązania, części lub całości zadania, zdającemu należy przyznać przynajmniej 1 punkt, zgodnie z kryteriami do poszczególnych zadań.
4. Jeśli zdający przedstawia nieprecyzyjne zapisy, na przykład pomija nawiasy lub zapisuje nawiasy w niewłaściwych miejscach, ale przeprowadza poprawne rozumowanie lub stosuje właściwą strategię, to może otrzymać przynajmniej 1 punkt za rozwiązanie zadania.
5. W przypadku zadania wymagającego wyznaczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi poprawną metodę wyznaczania pierwiastków trójmianu kwadratowego, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
6. W przypadku zadania wymagającego rozwiązania nierówności kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli stosuje poprawny algorytm rozwiązywania nierówności kwadratowej, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
7. W przypadku zadania wymagającego stosowania własności funkcji kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt za wykorzystanie konkretnych własności funkcji kwadratowej, istotnych przy poszukiwaniu rozwiązania.

8. W przypadku zadania wymagającego zastosowania własności ciągów arytmetycznych lub geometrycznych zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi wykorzystanie takiej własności ciągu, która umożliwia znalezienie rozwiązania zadania.
9. W przypadku zadania wymagającego analizowania figur geometrycznych na płaszczyźnie kartezjańskiej zdający może otrzymać punkty, jeżeli przy poszukiwaniu rozwiązania przedstawi poprawne rozumowanie, wykorzystujące własności figur geometrycznych lub zapisze zależności, pozwalające rozwiązać zadanie.
10. W przypadku zadania z rachunku prawdopodobieństwa zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeśli przy wyznaczaniu liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających rozważanemu zdarzeniu przyjmuje określoną regularność lub podaje prawidłową metodę wyznaczenia tej liczby zdarzeń elementarnych.
11. W przypadku zadania z geometrii zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeżeli podaje poprawną metodę wyznaczenia długości odcinka potrzebnej do znalezienia rozwiązania.
12. W przypadku zadania wymagającego przeprowadzenia dowodu (z zakresu algebry lub geometrii), jeśli w przedstawionym rozwiązaniu zdający powoła się na własność, która wyznacza istotny postęp, prowadzący do przeprowadzenia dowodu, to może otrzymać 1 punkt.

II. Dodatkowe **szczegółowe zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Zadanie 3.

1 pkt – zastosowanie wzoru skróconego mnożenia do wyrażenia $(2n+5)^2$

ALBO

– przekształcenie wyrażenia $(2n+5)^2$ do postaci $4n^2+10n+10n+25$.

Zadanie 7.

1 pkt – przekształcenie wielomianu $x^3+5x^2-2x-10$ do postaci $x^2(x+5)-2(x+5)$ lub $x(x^2-2)+5(x^2-2)$

ALBO

– zapisanie jednego z rozwiązań równania $x^3+5x^2-2x-10=0$.

Zadanie 10.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 20.

1 pkt – zapisanie, że trójkąty ABE oraz DCE są podobne
ALBO
– zapisanie równości $|BE|^2 = 12^2 + |AE|^2$.

Zadanie 21.

1 pkt – poprawne narysowanie w kartezjańskim układzie współrzędnych prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x - 1$
ALBO
– poprawne narysowanie w kartezjańskim układzie współrzędnych prostej o równaniu $y = 2x - 4$.

Zadanie 29.

1 pkt – zapisanie jedynie liczby 15 (należy traktować to jako wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych).

Uwagi:

1. W ocenie rozwiązania tego zadania (dla zdających z dyskalkulią) nie stosuje się uwagi ze standardowych zasad oceniania.
2. Jeżeli zdający poprawnie wypisze/zaznaczy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, lecz popełni błąd w ich zliczeniu (np. $|A| = 5$) i konsekwentnie zapisze wynik (np. $\frac{5}{15}$), to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 30.

1 pkt – zapisanie równości $x + y = 12$.

Uwagi:

1. W ocenie rozwiązania tego zadania (dla zdających z dyskalkulią) nie stosuje się uwagi 2. ze standardowych zasad oceniania.
2. Jeżeli zdający nie zapisze poprawnie wyrażenia $2x^2 + y^2$ jako funkcji f jednej zmiennej a jedynie obliczy wartości wyrażenia $2x^2 + y^2$ dla wybranych par liczb x oraz y i na tej podstawie wskazuje najmniejszą wartość wyrażenia $2x^2 + y^2$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**. W ocenie rozwiązania tego zadania (dla zdających z dyskalkulią) nie stosuje się uwagi 3. ze standardowych zasad oceniania.