Rodzaj dokumentu:	Zasady oceniania rozwiązań zadań
Egzamin:	Egzamin maturalny Arkusz diagnostyczny
Przedmiot:	Matematyka
Poziom:	Poziom podstawowy
Formy arkusza:	MMAP-P0-100, MMAP-P0-200, MMAP-P0-300, MMAP-P0-400, MMAP-P0-660, MMAP-P0-700, MMAP-P0-Q00
Data publikacji dokumentu:	30 września 2022 r.

Uwaga: Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Komentarz
Obliczamy wartość wyrażenia:

$$(1+3\cdot 2^{-1})^{-2}=\left(1+3\cdot\frac{1}{2}\right)^{-2}=\left(1+\frac{3}{2}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}=\left(\frac{2}{5}\right)^{2}=\frac{4}{25}$$

[1] Komunikat o wymaganiach egzaminacyjnych obowiązujących w roku 2023 i 2024, https://www.gov.pl/web/edukacja-i-nauka/wymagania-egzaminacyjne-obowiazujace-na-egzaminie-maturalnym-w-roku-2023-i-2024

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Komentarz
Obliczamy wartość wyrażenia:

$$2\log_5 5 + 1 - \frac{1}{2}\log_5 625 = 2\cdot 1 + 1 - \frac{1}{2}\cdot 4 = 2 + 1 - 2 = 1$$

Zadanie 3. (0-1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Komentarz

Wśród wielokrotności liczby 25 nieparzyste to te, których końcówka dwucyfrowa to 25 lub 75, co daje dwie możliwości. Cyfrę setek możemy wybrać na 10 sposobów, natomiast cyfrę tysięcy na 9 sposobów.

Zadanie 4. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: II.6) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne […].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Komentarz

Przekształcamy wyrażenie

$$\frac{2}{x-1}-5=\frac{2}{x-1}-\frac{5\cdot(x-1)}{x-1}=\frac{2-5x+5}{x-1}=\frac{-5x+7}{x-1}$$

Zadanie 5. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	I. Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2; II.2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;

Zasady oceniania

2 pkt – wybranie dwóch poprawnych odpowiedzi: D i F.
1 pkt – wybranie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których jedna jest poprawna: D albo F.
0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

DF

Komentarz
Przekształcamy wyrażenia, stosując wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń:

$$[3-(x-y)]\cdot[3+(x-y)]=9-(x-y)^2=9-(x^2-2xy+y^2)$$

oraz

$$-[(x-y)-3]\cdot[(x-y)+3]=-[(x-y)^2-9]=9-(x^2-2xy+y^2).$$

Zadanie 6. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x)=0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody rozwiązania równania i podanie wszystkich rozwiązań równania: $x=-3$ lub $x=2$ lub $x=3$.

2 pkt – rozwiązanie jednego z równań: $x^2-9=0$ albo $x-2=0$.

1 pkt – przekształcenie lewej strony równania $3x^3-6x^2-27x+54=0$ do postaci iloczynu wielomianów stopnia co najwyżej drugiego.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy lewą stronę równania do postaci iloczynu:

$$3x^3-6x^2-27x+54=0$$

$$3x^2(x-2)-27(x-2)=0$$

$$(x-2)(3x^2-27)=0$$

$$3(x-2)(x^2-9)=0$$

Stąd otrzymujemy kolejno

$$x-2=0 \quad \text{lub} \quad x^2-9=0$$

$$x-2=0 \quad \text{lub} \quad (x-3)(x+3)=0$$

$$x-2=0 \quad \text{lub} \quad x-3=0 \quad \text{lub} \quad x+3=0$$

$$x=2 \quad \text{lub} \quad x=3 \quad \text{lub} \quad x=-3$$

Rozwiązaniami równania są liczby: (-3), 2 oraz 3.

Zadanie 7. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.6) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Komentarz
Wyznaczamy dziedzinę równania: $D = R \setminus \{-1,1\}$.
Licznik ułamka jest równy 0, gdy

$$(x^2 + x) = 0 \text{ lub } (x + 3) = 0 \text{ lub } (x - 1) = 0$$

Zatem

$$x(x + 1) = 0 \text{ lub } x = -3 \text{ lub } x = 1$$

$$x = 0 \text{ lub } x = -1 \text{ lub } x = -3 \text{ lub } x = 1$$

Spośród tych czterech liczb do dziedziny należą tylko $x = -3$ oraz $x = 0$.

Zadanie 8. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej; I.7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: $\lvert x + 4 \rvert = 5$, $\lvert x - 2 \rvert < 3$, $\lvert x + 3 \rvert \geq 4$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Komentarz
Dany zbiór składa się z dwóch przedziałów, których końce są równo odległe od liczby (-2). Z własności wartości bezwzględnej mamy, że

$$|x-a| \geq r \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x \leq a-r \text{ lub } x \geq a+r.$$

Zatem uwzględniając interpretację geometryczną możemy stwierdzić, że rozwiązaniem jest C

Zadanie 9. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: IV.2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 10.1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości […].

Zasady oceniania
1 pkt – rozwiązanie poprawne.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie
$[-4, 4]$

Zadanie 10.2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: […] miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
FP

Zadanie 10.3.

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: […] największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 11. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Komentarz
Środkiem okręgu jest punkt $S=(3,-1)$. Obliczmy długość odcinka AS:

$$|AS|=\sqrt{(3-8)^2+(-1-11)^2}=\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$$

Zadanie 12.1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: V.2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Komentarz
Największa głębokość basenu jest miejscu odległym od płytszego brzegu o 25 m.

$$y(25)=0{,}18\cdot 25-0{,}9=3{,}6$$

Zadanie 12.2. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: V.5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej; V.6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne obliczenie wartości współczynnika a: $a = 0{,}04$.

1 pkt – poprawne obliczenie wartości współczynnika b: $b = 1{,}2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy wartość współczynnika b:

$$b = y(0) = 1{,}2$$

W celu obliczenia wartości współczynnika a obliczamy głębokość basenu w odległości 15 m od płytszego brzegu, gdzie łączą się obie płaszczyzny dna:

$$y(15) = 0{,}18 \cdot 15 - 0{,}9 = 1{,}8$$

Zatem

$$a \cdot 15 + 1{,}2 = 1{,}8$$

i stąd $a = 0{,}04$.

Zadanie 13.1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje).

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Komentarz

Funkcja f dana jest w postaci kanonicznej $f(x) = a(x-p)^2 + q$, z której można odczytać współrzędne wierzchołka $W = (p, q)$.

Zadanie 13.2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości […].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Komentarz

Funkcja f dana jest w postaci kanonicznej $f(x) = a(x-p)^2 + q$, z której można odczytać współrzędne wierzchołka $W(p, q)$. Biorąc pod uwagę, że współczynnik $a = -1$, stwierdzamy, że ramiona paraboli są opuszczone do dołu, a największa przyjmowana przez nią wartość jest w wierzchołku, dla którego $q = 2$.

Zadanie 14.1 (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Komentarz

$$a_{50} = \frac{7^{50}}{21} = \frac{7^{49}}{3}$$

Zadanie 14.2 (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.3) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny; VI.5) stosuje wzór […] na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
PF

Komentarz
Aby sprawdzić, czy ciąg (a_n) jest geometryczny, sprawdzamy, czy jego iloraz jest stały:

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{7^{n+1}}{21} : \frac{7^n}{21} = \frac{7^{n+1}}{7^n} = 7$$

Obliczamy sumę trzech początkowych wyrazów:

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{3} + \frac{7}{3} + \frac{49}{3} = \frac{57}{3} = 19$$

Zadanie 15. (0-1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.2) posługuje się równaniem prostej na płaszczyźnie w postaci kierunkowej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Komentarz
Podstawiając współrzędne punktu A do równania prostej, otrzymamy

$$3 = 3 \cdot (-1) + b,$$

a stąd

$$b = 6$$

Zadanie 16.1 (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.	Zdający: VI.2) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A3

Komentarz
Obliczmy różnicę ciągu:

$$a_{n+1} - a_n = [3(n+1) - 1] - [3n - 1] = 3n + 3 - 1 - 3n + 1 = 3$$

Ponieważ różnica ciągu jest liczbą dodatnią, więc ciąg jest rosnący.

Zadanie 16.2 (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Komentarz
Rozwiązujemy nierówność $a_n > 25$:

$$a_n > 25$$

$$3n - 1 > 25$$

$$3n > 26$$

$$n > 8\tfrac{2}{3}$$

Najmniejszą liczbą naturalną, która spełnia tę nierówność, jest $n = 9$.

Zadanie 16.3 (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym; VI.3) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny; VI.4) stosuje wzór […] na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Komentarz
Wypisujemy kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n) i obliczamy ich sumy:

$$2+5=7$$
$$2+5+8=15$$
$$2+5+8+11=26$$
$$2+5+8+11+14=40$$
$$2+5+8+11+14+17=57$$

Suma sześciu początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa 57.

Zadanie 17. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX. 2) posługuje się równaniem prostej na płaszczyźnie w postaci kierunkowej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 18. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Komentarz
Przekształcamy dane wyrażenie:

$$(1-\cos 20^\circ)\cdot(1+\cos 20^\circ)-\sin^2 20^\circ =$$
$$=(1-\cos^2 20^\circ)-\sin^2 20^\circ =$$
$$=\sin^2 20^\circ-\sin^2 20^\circ = 0$$

Zadanie 19. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych; 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Komentarz
Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli białej. Przyjmujemy, że w pojemniku jest $4n$ kul białych oraz $5n$ kul czerwonych i obliczamy prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej spośród $9n$ wszystkich kul:

$$P(A)=\frac{4n}{9n}=\frac{4}{9}$$

Zadanie 20. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Komentarz
Każdy z trójkątów ABO, BCO oraz ACO jest równoramienny (ramionami są promienie okręgu). Wynika stąd, że

$$|\angle AOB| = 180° - 2 \cdot 40° = 100°$$

$$|\angle BOC| = 180° - 2 \cdot 10° = 160°$$

Kąty AOB, BOC oraz AOC tworzą razem kąt pełny, stąd

$$|\angle AOC| = 360° - (100° + 160°) = 100°$$

Stąd

$$|\angle ACO| = (180° - 100°) : 2 = 40°$$

Zadanie 21. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.4) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty m.in. z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów). VIII.2) […] stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie twierdzenia cosinusów i obliczenie cosinusa największego kąta trójkąta: $\cos\alpha = \frac{1}{4}$.

1 pkt – zastosowanie twierdzenia cosinusów i zapisanie równania $8^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos\alpha$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy miarę największego kąta w rozpatrywanym trójkącie przez α.

W trójkącie największy kąt wewnętrzny znajduje się naprzeciw najdłuższego boku.
Korzystamy z twierdzenia cosinusów i obliczamy cosinus największego kąta:

$$8^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos\alpha$$

$$64 = 36 + 49 - 84\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{4}$$

Zadanie 22. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VIII.7) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Komentarz

Korzystając z twierdzenia o dwusiecznej kąta otrzymujemy proporcję

$$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|CB|}$$

Podstawiając długości odpowiednich odcinków, mamy

$$\frac{3{,}2}{|CD|} = \frac{4}{4{,}6}$$

Stąd

$$|CD| = \frac{3{,}2 \cdot 4{,}6}{4} = \frac{92}{25}$$

Zadanie 23. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XIII. rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia liczby wiatraków maksymalizującej zysk oraz poprawny wynik: $x = 115$ oraz $Z(115) = 13\,055$ zł.

3 pkt – zapisanie dziedziny funkcji Z: $x \in [0\,,150] \cap \mathbb{Z}$ oraz obliczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli i zapisanie, że 115 należy do dziedziny funkcji Z.

2 pkt – zapisanie poprawnego wzoru funkcji Z zysku w postaci jawnej: $Z(x) = -x^2 + 230x - 170$.

1 pkt – zapisanie funkcji Z zysku w postaci $Z(x) = P(x) - K(x)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zysk ze sprzedaży jest różnicą przychodu ze sprzedaży wiatraków oraz kosztu ich wytworzenia: $Z(x) = P(x) - K(x) = -x^2 + 230x - 170$.

Tygodniowo w zakładzie można wyprodukować maksymalnie 150 wiatraków, więc dziedziną funkcji Z jest zbiór wszystkich liczb całkowitych z przedziału $[0\,,150]$.

Ponieważ funkcja $Z(x) = -x^2 + 230x - 170$ jest funkcją kwadratową, największą wartość przyjmuje dla argumentu będącego pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli.

Korzystając ze wzoru $p = -\frac{b}{2a}$, obliczamy

$$x = -\frac{230}{2 \cdot (-1)} = \frac{-230}{-2} = 115$$

Liczba $x = 115$ należy do dziedziny funkcji Z.

Największy tygodniowy zysk jest osiągany przy produkcji 115 wiatraków tygodniowo.

Obliczymy go, przyjmując $x = 115$:

$$Z(115) = -115^2 + 230 \cdot 115 - 170 = 13\,055 \text{ zł}$$

Przy produkcji 115 wiatraków tygodniowo zysk firmy będzie równy $13\,055$ zł.

Zadanie 24.1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XII.2) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną […].

Zasady oceniania
1 pkt – rozwiązanie poprawne.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Rozwiązanie
A

Komentarz
Dodając wszystkie płace pracowników firmy F, otrzymujemy sumę

$$75 \cdot 4000 + 50 \cdot 4800 + 20 \cdot 5000 + 10 \cdot 6000 + 5 \cdot 7000 = 735\,000$$

Dzieląc ją przez liczbę pracowników, mamy

$$735\,000 : 160 = 4\,593{,}75$$

Zadanie 24.2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XII.2) […] znajduje medianę i dominantę.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Komentarz
Mediana jest średnią arytmetyczną płac pracownika nr 80 i 81 przy uporządkowaniu ich w porządku niemalejącym. Obaj pracownicy otrzymują płacę miesięczną równą 4800 zł.

Zadanie 24.3. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.1) wykonuje działania […] w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Komentarz
Do grupy, o której mowa w zadaniu, zaliczamy pracowników z płacą 4000 zł, 4800 zł oraz 5000 zł. Jest ich razem

$$75 + 50 + 20 = 145.$$

Obliczamy, jakim procentem liczby wszystkich pracowników jest liczba pracowników w danej grupie:

$$\frac{145}{160} \cdot 100\% = 90{,}625\% \approx 91\%$$

Zadanie 25. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii podczas rozwiązywania zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.4) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty m.in. z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów). VIII.2) […] stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok.

Zasady oceniania

3 pkt – obliczenie promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa, poprawne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa do obliczenia wysokości H bryły i poprawny wynik: $H = 5\sqrt{5}$.

2 pkt – obliczenie promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa oraz poprawne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa do obliczenia wysokości H bryły.

1 pkt – obliczenie promienia R okręgu opisanego na trójkącie równobocznym: $R = 10$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny o boku $10\sqrt{3}$.

Ponieważ krawędzie boczne ostrosłupa mają taką samą długość, spodek wysokości ostrosłupa jest punktem jednakowo odległym od wierzchołków podstawy bryły, czyli jest środkiem okręgu opisanego na podstawie.

Obliczamy promień R okręgu opisanego na podstawie: $R = \frac{10\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3} = 10$.

Oznaczmy przez A, B, C, S wierzchołki ostrosłupa, przez S' – spodek wysokości H opuszczonej z wierzchołka S na podstawę ABC (patrz rysunek).

Stosujemy do trójkąta $AS'S$ twierdzenie Pitagorasa i otrzymujemy kolejno

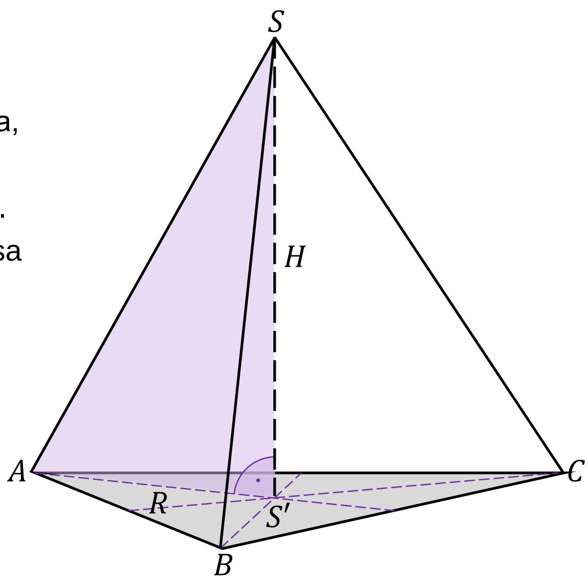
$$|AS'|^2 + |S'S|^2 = |SA|^2$$

$$R^2 + H^2 = |SA|^2$$

$$10^2 + H^2 = 15^2$$

$$H^2 = 225 - 100$$

$$H = 5\sqrt{5}$$



Wysokość ostrosłupa jest równa $5\sqrt{5}$.

Zadanie 26. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych.

Zasady oceniania

2 pkt – przekształcenie danego wyrażenia do postaci $5 \cdot (2n^2 + 6n + 1) + 3$ oraz zapisanie, że $2n^2 + 6n + 1$ jest liczbą całkowitą.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $10n^2 + 30n + 8$ do postaci $5 \cdot (2n^2 + 6n + 1) + 3$.

0 pkt –rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy równoważnie dane wyrażenie

$$10n^2 + 30n + 8 = 10n^2 + 30n + 5 + 3 = 5 \cdot (2n^2 + 6n + 1) + 3.$$

Ponieważ wartość wyrażenia $2n^2 + 6n + 1$ jest liczbą całkowitą, to $5 \cdot (2n^2 + 6n + 1)$ jest wielokrotnością liczby 5, zatem $5 \cdot (2n^2 + 6n + 1) + 3$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3. To należało wykazać.