

**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2018/2019**

**FORMUŁA OD 2015  
„NOWA MATURA”  
i  
FORMUŁA DO 2014  
„STARA MATURA”**

**MATEMATYKA  
POZIOM PODSTAWOWY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ  
ARKUSZ MMA-P1**

**SIERPIEŃ 2019**

## **Egzaminatorze!**

- Oceniaj prace zdających uczciwie i z zaangażowaniem.
- **Stosuj przyjęte zasady oceniania w sposób obiektywny.** Pamiętaj, że każda merytorycznie poprawna odpowiedź, spełniająca warunki określone w poleceniu, musi zostać pozytywnie oceniona, nawet jeżeli nie została przewidziana w przykładowych odpowiedziach w zasadach oceniania.
- Konsultuj niejednoznaczne rozwiązania zadań z innymi egzaminatorami lub przewodniczącym zespołu egzaminatorów. W przypadku niemożności osiągnięcia wspólnego stanowiska, rozstrzygajcie na korzyść zdającego.
- Przyznając punkty, nie kieruj się emocjami.
- Informuj przewodniczącego o wszystkich nieprawidłowościach zaistniałych w trakcie oceniania, w tym podejrzeniach o niesamodzielność w pisaniu pracy.

## Klucz punktowania zadań zamkniętych

### Wersja A/C

Nr zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odp.	A	B	B	C	C	C	D	D	C	A	B	A	C	B	A	B	A	D	A	B	C	D	A	D	D

### Schemat oceniania zadań otwartych

#### Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż równanie  $(x^2 - 16)(x^3 - 1) = 0$ .

#### Przykładowe rozwiązanie

Iloczyn jest równy 0, jeśli przynajmniej jeden z czynników jest równy 0.

Zatem  $x^2 - 16 = 0$  lub  $x^3 - 1 = 0$ .

Równanie  $x^2 - 16 = 0$  ma dwa rozwiązania  $x = 4$  i  $x = -4$ .

Równanie  $x^3 - 1 = 0$  ma jedno rozwiązanie  $x = 1$ .

Zatem rozwiązaniami równania  $(x^2 - 16)(x^3 - 1) = 0$  są liczby:  $x = 4$ ,  $x = -4$  oraz  $x = 1$ .

#### Schemat punktowania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy:

- zapisze dwa równania  $x^2 - 16 = 0$  i  $x^3 - 1 = 0$  lub z zapisu wynika, że rozwiązuje te równania

albo

- wyznaczy poprawnie lub poda rozwiązania jednego z równań:  $x^2 - 16 = 0$  lub  $x^3 - 1 = 0$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy wyznaczy wszystkie rozwiązania równania:  $x = 4$ ,  $x = -4$  oraz  $x = 1$ , ale nie uzyska ich w wyniku błędnej metody.

#### Uwagi

1. Jeżeli zdający jedynie poda wszystkie rozwiązania równania, bez zapisanych rachunków lub uzasadnienia, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający poprawnie zapisze lewą stronę równania w postaci sumy jednomianów, znajdzie trzy rozwiązania:  $-4, 1, 4$ , ale nie uzasadni, że są to jedyne rozwiązania, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli na etapie przyrównywania czynników do zera jedynym błędem zdającego jest błąd przy rozkładzie wielomianu  $x^3 - 1$ , to zdający może otrzymać **1 punkt** za całe rozwiązanie.

**Zadanie 27. (0–2)**

Rozwiąż nierówność  $2x^2 - 5x + 3 \leq 0$ .

**Przykładowe rozwiązanie**

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

**Pierwszy etap** to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego  $2x^2 - 5x + 3$ .

**Drugi etap** to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej.

Pierwszy etap rozwiązania może zostać zrealizowany następująco:

- obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego  $2x^2 - 5x + 3$ 
  - obliczamy wyróżnik tego trójmianu:  
 $\Delta = -5 \cdot (-5) - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1^2$  i stąd  $x_1 = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$  oraz  $x_2 = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
  - albo
  - stosujemy wzory Viète'a:  
 $x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{2}$  oraz  $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$ , stąd  $x_1 = 1$  oraz  $x_2 = \frac{3}{2}$ .

Drugi etap rozwiązania.

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności:  $\langle 1, \frac{3}{2} \rangle$  lub  $x \in \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$ .

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x_1 = 1$  oraz  $x_2 = \frac{3}{2}$  i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności;
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji  $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$  i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

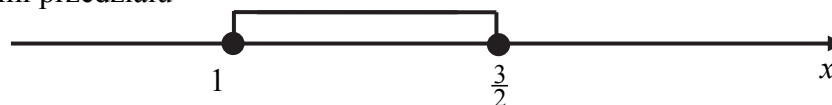
- realizując pierwszy etap błędnie wyznaczy pierwiastki (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np. popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności:  $\langle 1, \frac{3}{2} \rangle$  lub  $x \in \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$ , lub  $x \leq \frac{3}{2} \wedge x \geq 1$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziału



**Uwagi**

1. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy obliczony wyróżnik  $\Delta$  jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci:  $x \leq \frac{3}{2}$  lub  $x \geq 1$ ,  $x \leq \frac{3}{2}$  oraz  $x \geq 1$ , itp.
4. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu  $x_1 = 1$  oraz  $x_2 = \frac{3}{2}$  i błędnie zapisze odpowiedź, np.  $x \in \left\langle -1, \frac{3}{2} \right\rangle$ , popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.

### Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci  $x \in \left\langle \frac{3}{2}, 1 \right\rangle$ , to przyznajemy **2 punkty**.

### Zadanie 28. (0–2)

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej  $x$  prawdziwa jest nierówność  $x + \frac{1-x}{x} \geq 1$ .

#### Przykładowe rozwiązanie

Przekształcamy równoważnie nierówność  $x + \frac{1-x}{x} \geq 1$ .

Z założenia wiemy, że  $x > 0$ , zatem możemy pomnożyć nierówność obustronnie przez  $x$  i kolejno otrzymujemy:

$$\begin{aligned}x^2 + 1 - x &\geq x, \\x^2 - 2x + 1 &\geq 0, \\(x - 1)^2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Z lewej strony nierówności występuje wyrażenie przyjmujące wartość nieujemną, bo jest ono kwadratem liczby rzeczywistej. Zatem nierówność  $x + \frac{1-x}{x} \geq 1$  jest prawdziwa.

#### Schemat punktowania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy zapisze nierówność równoważną w postaci

- zawierającej po jednej stronie 0, a po drugiej sumę jednomianów lub iloraz wielomianów, np.:

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \text{ lub } \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \geq 0$$

albo

- $x + \frac{1}{x} - 1 \geq 1$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

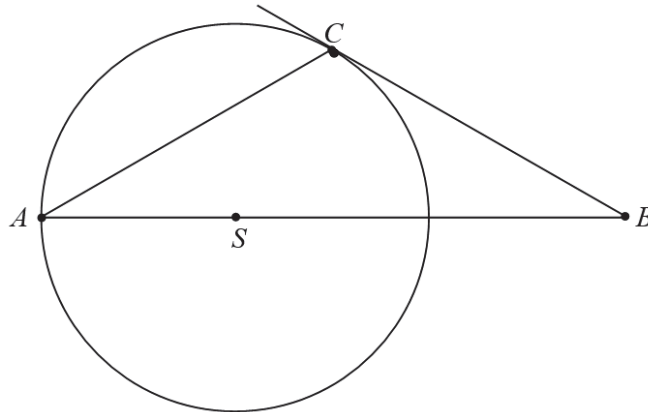
#### Uwagi

1. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości  $x$ , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający zapisze nierówność  $(x-1)^2 \geq 0$  i stwierdzi zakończenie dowodu, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający zapisze  $\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$  i nie zapisze uzasadnienia jej prawdziwości, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

**Zadanie 29. (0–2)**

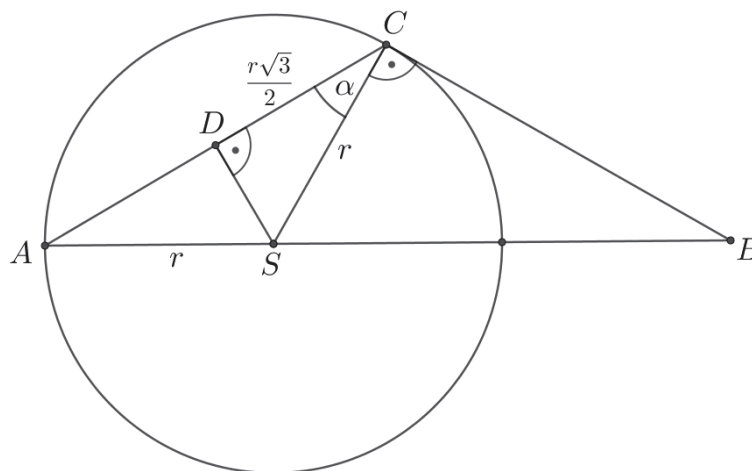
Wierzchołki  $A$  i  $C$  trójkąta  $ABC$  leżą na okręgu o promieniu  $r$ , a środek  $S$  tego okręgu leży na boku  $AB$  trójkąta (zobacz rysunek). Prosta  $BC$  jest styczna do tego okręgu w punkcie  $C$ , a ponadto  $|AC| = r\sqrt{3}$ . Wykaż, że kąt  $ACB$  ma miarę  $120^\circ$ .



**Przykładowe rozwiązania**

**I sposób**

Zauważmy, że prosta  $BC$ , jako styczna do okręgu, jest prostopadła do odcinka  $SC$ , tj. do promienia okręgu. W trójkącie równoramiennym  $ACS$  prowadzimy wysokość  $SD$ .



Obliczamy cosinus kąta ostrego  $ACS$ :

$$\cos \alpha = \frac{\frac{r\sqrt{3}}{2}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

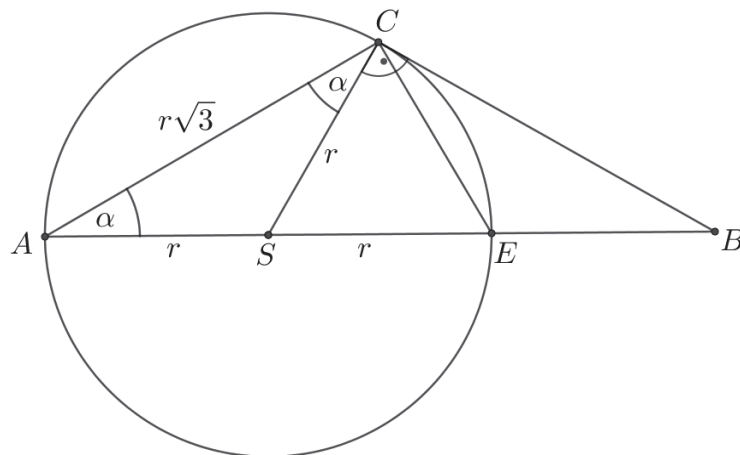
Stąd wynika, że  $|\sphericalangle ACS| = \alpha = 30^\circ$ .

Kąt  $ACB$  jest sumą kątów  $ACS$  i  $BCS$ , zatem ma miarę  $30^\circ + 90^\circ$ , czyli  $120^\circ$ .

To kończy dowód.

**II sposób**

Poprowadźmy promień  $SC$  i odcinek  $CE$ , gdzie  $E$  jest punktem przecięcia okręgu z odcinkiem  $AB$ .



Prosta  $BC$ , jako styczna do okręgu, jest prostopadła do odcinka  $SC$ .

Kąt  $ACE$  jest prosty, gdyż jest kątem wpisanym w okrąg opartym na półokręgu. Zatem trójkąt  $ACE$  jest prostokątny, w którym  $|AC| = r\sqrt{3}$  oraz  $|AE| = 2r$ . Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $ACE$  otrzymujemy

$$|CE|^2 = |AE|^2 - |AC|^2 = (2r)^2 - (r\sqrt{3})^2 = r^2,$$

stąd

$$|CE| = r.$$

To oznacza, że trójkąt  $SCE$  jest równoboczny, więc kąt  $CSE$  jest równy  $60^\circ$ . Zatem kąt wpisany  $CAE$ , oparty na tym samym łuku co kąt środkowy  $CSE$  jest równy  $\alpha = 30^\circ$ .

Trójkąt  $ACS$  jest równoramienny, więc  $|\sphericalangle ACS| = |\sphericalangle CAS| = 30^\circ$ .

Kąt  $ACB$  jest sumą kątów  $ACS$  i  $BCS$ , zatem ma miarę  $30^\circ + 90^\circ$ , czyli  $120^\circ$ .

To kończy dowód.

**Uwaga**

Miarę kąta  $ACS$  (lub kąta  $ASC$ ) możemy też obliczyć, wykorzystując twierdzenie cosinusów w trójkącie  $ACS$ . Wtedy otrzymujemy

$$\begin{aligned} |AS|^2 &= |AC|^2 + |CS|^2 - 2|AC| \cdot |CS| \cdot \cos \alpha, \\ r^2 &= (r\sqrt{3})^2 + r^2 - 2 \cdot r\sqrt{3} \cdot r \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Stąd

$$\cos \alpha = \frac{3r^2}{2r^2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zatem  $\alpha = 30^\circ$ .

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy

- wyznaczy miarę jednego z kątów  $ACS$ ,  $CAS$ ,  $ASC$ ,  $SCE$ , wykorzystując związki miarowe w trójkącie prostokątnym  $CDS$  lub  $ADS$  lub  $ACE$  lub twierdzenie Pitagorasa

albo

- obliczy cosinus jednego z kątów  $ACS$ ,  $CAS$ ,  $ASC$

na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Uwaga**

Jeżeli zdający zapisze lub zaznaczy na rysunku, że kąt  $BCS$  jest prosty oraz zapisze bez uzasadnienia, że kąt  $ACS$  jest równy  $30^\circ$ , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

**Zadanie 30. (0–2)**

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  polegającego na tym, że wylosowana liczba w zapisie dziesiętnym ma cyfrę dziesiątek, która należy do zbioru  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$  i jednocześnie cyfrę jedności, która należy do zbioru  $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ .

**Przykładowe rozwiązania****I sposób** (klasyczna definicja prawdopodobieństwa)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary liczb  $(a, b)$ , gdzie  $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  i  $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ . Jest to model klasyczny. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa  $|\Omega| = 9 \cdot 10 = 90$ .

Liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$  polegającemu na otrzymaniu w wyniku losowania par liczb  $(a, b)$ , spełniających warunki:  $a \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$  i  $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ .

Liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$  jest więc równa  $|A| = 5 \cdot 5 = 25$ .

Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest równe:  $P(A) = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$ .

**II sposób** (metoda tabeli)

Wszystkie zdarzenia elementarne możemy przedstawić w prostokątnej tabelicy. Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu zaznaczamy symbolem  $x$

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	x		x		x		x		x
1									
2	x		x		x		x		x
3									
4	x		x		x		x		x
5									
6	x		x		x		x		x
7									
8	x		x		x		x		x
9									

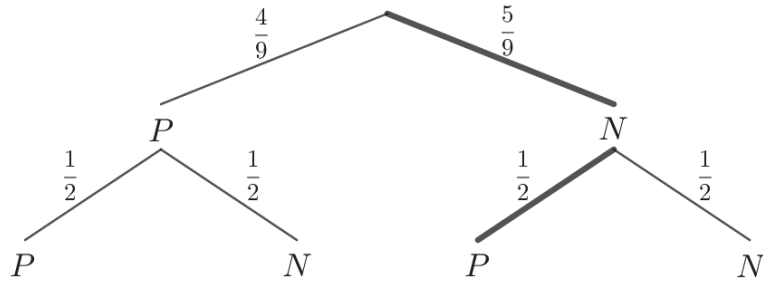
Stąd  $|\Omega| = 9 \cdot 10 = 90$ ,  $|A| = 5 \cdot 5 = 25$ .

Zatem  $P(A) = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$ .

**III sposób** (metoda drzewka)

Przedstawiamy model graficzny doświadczenia.

$P$  – oznacza liczbę parzystą,  $N$  – nieparzystą.



Pogrubiona gałąź drzewa odpowiada zdarzeniu  $A$ . Zatem prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest równe

$$P(A) = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}.$$

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy

- obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 90$

albo

- wyznaczy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$ :  $|A| = 25$  i nie wskaże przy tym zdarzeń elementarnych niesprzyjających zdarzeniu  $A$ ,

albo

- zapisze przy stosowaniu drzewa probabilistycznego na dwóch etapach prawdopodobieństwa potrzebne do wyznaczenia końcowego wyniku oraz wskaże wszystkie sytuacje sprzyjające rozważanemu zdarzeniu,

albo

- wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$  lub wypisze wszystkie zdarzenia elementarne

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
 $P(A) = \frac{5}{18}, P(A) = \frac{25}{90}$ .

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający popełni błąd przy wypisywaniu wszystkich zdarzeń elementarnych i wypisze o jedno za mało lub jedno powtórzy, ale nie wypisze żadnego niewłaściwego i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma  $P(A) > 1$  lub  $P(A) < 0$ , to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**, o ile końcowy wynik nie jest skutkiem błędu w działaniach na ułamkach.
3. Jeżeli zdający stosuje rozbudowane drzewo probabilistyczne, w którym przynajmniej pięć gałęzi odpowiada sytuacjom sprzyjającym rozważanemu zdarzeniu, i zdający pominie jedną z takich gałęzi, to może otrzymać **1 punkt**, jeśli doprowadzi rozumowanie do końca.
4. Jeżeli zdający zapisze tylko sam wynik końcowy:  $P(A) = \frac{25}{90}$  lub  $P(A) = \frac{5}{18}$ , to otrzymuje **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający zapisze tylko:  $|A| = 25, |\Omega| = 90, P(A) = \frac{25}{90}$ , to otrzymuje **2 punkty**.
6. Jeżeli zdający zapisze prawdopodobieństwo  $P(A) = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2}$ , to otrzymuje **2 punkty**.

**Zadanie 31. (0–2)**

Przekątne rombu  $ABCD$  przecinają się w punkcie  $S = \left(-\frac{21}{2}, -1\right)$ . Punkty  $A$  i  $C$  leżą na prostej o równaniu  $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{2}$ . Wyznacz równanie prostej  $BD$ .

**Przykładowe rozwiązanie**

Ponieważ przekątne rombu są prostopadłe, więc prosta  $BD$  jest prostopadła do prostej  $AC$  i przechodzi przez punkt  $S$ . Zatem prosta  $BD$  ma równanie postaci:

$$y = -3x + b.$$

Współrzędne punktu  $S$  spełniają to równanie, zatem

$$-1 = -3 \cdot \left(-\frac{21}{2}\right) + b.$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$b = -1 - \frac{63}{2} = -\frac{65}{2}.$$

Równanie prostej  $BD$  to:

$$y = -3x - \frac{65}{2}$$

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy poprawnie zapisze współczynnik kierunkowy prostej  $BD$ , prostopadłej do prostej  $AC$ :  
 $a = -$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy. 3

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy wyznaczy równanie prostej  $BD$ :  $y = -3x - \frac{65}{2}$ .

**Zadanie 32. (0–4)**

W ciągu arytmetycznym  $(a_1, a_2, \dots, a_{39}, a_{40})$  suma wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równa 1340, a suma wyrazów ciągu o numerach nieparzystych jest równa 1400. Wyznacz ostatni wyraz tego ciągu arytmetycznego.

**Przykładowe rozwiązanie**

Niech  $r$  oznacza różnicą rozważanego ciągu arytmetycznego.

Suma wyrazów o numerach parzystych tego ciągu to suma dwudziestu początkowych wyrazów innego ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie  $a_1 + r$  i różnicy  $2r$ .

Stąd możemy zapisać równanie:

$$\frac{a_1 + r + a_1 + r + 19 \cdot 2r}{2} \cdot 20 = 1340.$$

Z kolei suma wyrazów o numerach nieparzystych rozważanego w treści zadania ciągu to suma dwudziestu początkowych wyrazów innego ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie  $a_1$  i różnicy  $2r$ .

Stąd możemy zapisać równanie:

$$\frac{a_1 + a_1 + 19 \cdot 2r}{2} \cdot 20 = 1400.$$

Rozwiążemy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{a_1 + r + a_1 + r + 19 \cdot 2r}{2} \cdot 20 = 1340 \\ \frac{a_1 + a_1 + 19 \cdot 2r}{2} \cdot 20 = 1400. \end{cases}$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\begin{cases} (a_1 + 20r) \cdot 20 = 1340 \\ (a_1 + 19r) \cdot 20 = 1400, \\ \begin{cases} a_1 + 20r = 67 \\ a_1 + 19r = 70. \end{cases} \end{cases}$$

Po odjęciu stronami drugiego równania od pierwszego otrzymujemy:

$$r = -3,$$

a następnie:

$$a_1 = 127.$$

Obliczamy ostatni wyraz rozważanego ciągu:

$$a_{40} = 127 + 39 \cdot (-3) = 10.$$

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 p.

Zdający zapisze jedno równanie z dwiema niewiadomymi, wynikające z treści zadania, np.:

$$\frac{a_1 + r + a_1 + r + 19 \cdot 2r}{2} \cdot 20 = 1340 \text{ lub } \frac{a_1 + a_1 + 19 \cdot 2r}{2} \cdot 20 = 1400, \text{ lub } \frac{2a_1 + 39r}{2} \cdot 40 = 2740,$$
$$\text{lub } \frac{a_2 + a_{40}}{2} \cdot 20 = 1340, \text{ lub } \frac{a_1 + a_{39}}{2} \cdot 20 = 1400$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 p.

Zdający zapisze dwa nierównoważne równania z tymi samymi dwiema niewiadomymi, wynikające z treści zadania, np.:

$$\frac{a_1 + r + a_1 + r + 19 \cdot 2r}{2} \cdot 20 = 1340 \text{ oraz } \frac{a_1 + a_1 + 19 \cdot 2r}{2} \cdot 20 = 1400$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 p.

Zdający obliczy wyraz  $a_1$  i różnicę  $r$  rozważanego w zadaniu ciągu arytmetycznego:

$$a_1 = 127, r = -3,$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne** ..... 4 p.

Zdający obliczy czterdziesty wyraz rozważanego ciągu:  $a_{40} = 10$ .

### Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **3 punkty**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania.

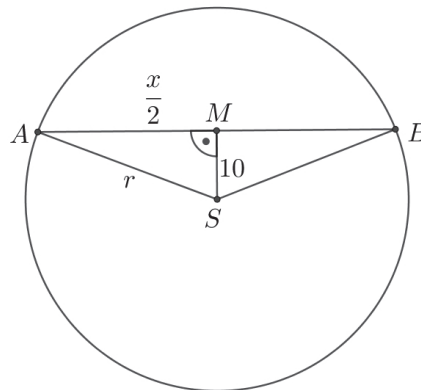
2. Jeżeli zdający stosuje metodę prób i błędów, sprawdzi, np. obliczając sumy odpowiednich składników, że wybrany ciąg spełnia warunki zadania, i wyznaczy  $a_{40} = 10$ , to otrzymuje **4 punkty**.
3. Jeżeli zdający zapisze jedynie  $a_1 = 127$ ,  $r = -3$  i  $a_{40} = 10$ , to otrzymuje **0 punktów**.
4. Jeżeli zdający pomyli sumy i przyjmie, że suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 1400, a suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 1340 i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający, zapisując równania z sumą dwudziestu wyrazów ciągu, próbuje wypisać wszystkie 20 wyrazów i pominie w równaniu jeden lub dwa wyrazy ciągu, ale konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

### Zadanie 33. (0–4)

Środek okręgu leży w odległości 10 cm od cięciwy tego okręgu. Długość tej cięciwy jest o 22 cm większa od promienia tego okręgu. Oblicz promień tego okręgu.

#### Przykładowe rozwiązanie

Niech  $A$  i  $B$  oznaczają końce rozpatrywanej cięciwy, niech  $S$  i  $r$  będą odpowiednio środkiem i promieniem okręgu, oraz niech  $x$  oznacza długość cięciwy  $AB$ .



Odległość środka  $S$  okręgu od cięciwy  $AB$  jest długością odcinka łączącego punkt  $S$  z środkiem  $M$  tej cięciwy. Zatem  $|AM| = \frac{x}{2}$ .

Odcinek  $MS$  jest prostopadły do cięciwy  $AB$ . Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego  $AMS$  otrzymujemy

$$|AS|^2 = |AM|^2 + |MS|^2,$$

$$r^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 10^2.$$

Z treści zadania wynika, że  $x = r + 22$ . Otrzymujemy więc równanie z jedną niewiadomą  $r$

$$r^2 = \left(\frac{r+22}{2}\right)^2 + 10^2,$$

$$r^2 = \frac{1}{4}r^2 + 11r + 121 + 100,$$

$$\frac{3}{4}r^2 - 11r - 221 = 0.$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe. Możemy wyznaczyć wyróżnik trójmianu kwadratowego, a następnie obliczyć rozwiązania.

Obliczamy wyróżnik  $\Delta$ :

$$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot (-221) = 121 + 663 = 784 = 28^2.$$

Obliczamy dwie wartości  $r$ :

$$r_1 = \frac{11-28}{2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{-17}{2 \cdot \frac{3}{4}} < 0, \text{ ta wartość jest ujemna i nie może być długością odcinka,}$$

$$\text{oraz } r_2 = \frac{11+28}{2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{39}{\frac{3}{4}} = \frac{39 \cdot 2}{3} = 26.$$

Zatem promień okręgu jest równy 26.

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 p.**

Zdający

- rozważa trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątną jest promień  $r$  okręgu, a przyprostokątnymi są: odcinek o długości 10 i odcinek o długości połowy rozważanej cięciwy (zdający może przedstawić sytuację na rysunku pomocniczym)

albo

- zapisze zależność między promieniem i długością rozważanej cięciwy, np.:  $x = r + 22$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający zapisze zależność, wynikającą z twierdzenia Pitagorasa, np.:

$$10^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = r^2$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.**

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.  $r$  ( $r$  oznacza promień okręgu):

$$10^2 + \left(\frac{r}{2} + 11\right)^2 = r^2$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający stwierdzi, że zadanie ma jedno rozwiązanie i poprawnie obliczy promień okręgu:  $r = 26$ .

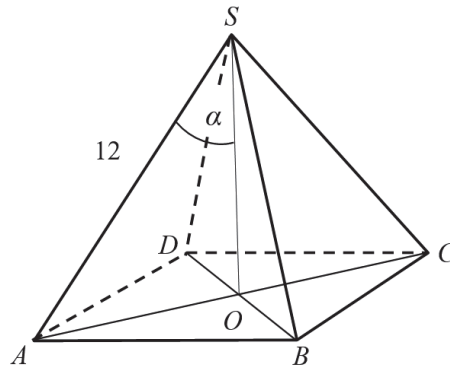
### Uwagi

- Jeśli zdający popełni błędy rachunkowe, które nie przekreślają poprawności rozumowania i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej **3 punkty**.
- Jeżeli jedynym błędem jest niepoprawne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa, np. pomylenie przyprostokątnej z przeciwprostokątną, to zdający może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

### Zadanie 34. (0–5)

Długość krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego  $ABCD$  jest równa 12. (zobacz rysunek). Krawędź boczna tworzy z wysokością tego ostrosłupa kąt  $\alpha$  taki, że

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ . Oblicz objętość tego ostrosłupa.



### Przykładowe rozwiązania

#### I sposób

Wprowadzamy oznaczenia:  $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a$ ,  $|SO| = H$ .

Trójkąt  $AOS$  jest prostokątny, zatem  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}{H} = \frac{a\sqrt{2}}{2H}$ , czyli  $\frac{a\sqrt{2}}{2H} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .

Stąd  $a = \frac{4H}{\sqrt{10}}$ .

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $AOS$  dostajemy

$$H^2 + \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2 = 12^2,$$

$$H^2 + \frac{1}{2}a^2 = 144.$$

Otrzymujemy więc równanie z jedną niewiadomą  $H$

$$H^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{4H}{\sqrt{10}}\right)^2 = 144,$$

$$H^2 + \frac{4}{5}H^2 = 144,$$

$$\frac{9}{5}H^2 = 144$$

$$H^2 = \frac{5}{9} \cdot 144 = 16 \cdot 5.$$

Stąd  $H = 4\sqrt{5}$  oraz  $a = \frac{4H}{\sqrt{10}} = \frac{16\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = 8\sqrt{2}$ .

Objętość ostrosłupa jest równa  $V = \frac{1}{3}a^2H = \frac{1}{3}(8\sqrt{2})^2 \cdot 4\sqrt{5} = \frac{512\sqrt{5}}{3}$

#### II sposób

Wprowadzamy oznaczenia  $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a$ ,  $|SO| = H$ .

Z treści zadania wiemy że,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ , zatem  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ . Stąd  $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \cos \alpha$ .

Wykorzystując tę zależność oraz tożsamość  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  otrzymujemy

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{4}{5} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\frac{9}{5} \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{5}{9}.$$

Stąd  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ , gdyż  $\alpha$  jest kątem ostrym. Zatem  $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{3}$ .

Z trójkąta prostokątnego  $AOS$  otrzymujemy

$$\sin \alpha = \frac{|AO|}{12} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}{12} = \frac{a\sqrt{2}}{24} \text{ oraz } \cos \alpha = \frac{|AO|}{12} = \frac{H}{12}.$$

Zatem

$$\frac{a\sqrt{2}}{24} = \frac{2}{3} \text{ oraz } \frac{H}{12} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$
$$a = 8\sqrt{2} \text{ oraz } H = 4\sqrt{5}.$$

Objętość ostrosłupa jest równa  $V = \frac{1}{3}a^2H = \frac{1}{3}(8\sqrt{2})^2 \cdot 4\sqrt{5} = \frac{512\sqrt{5}}{3}$ .

### III sposób

Z treści zadania wiemy że,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .

Wprowadzamy oznaczenia w trójkącie  $AOS$ :  $|AO| = 2x$ ,  $|SO| = \sqrt{5}x$  i zapisujemy równanie  $(2x)^2 + (\sqrt{5}x)^2 = 12^2$ . Rozwiązaniem tego równania jest  $x = 4$ .

Stąd otrzymujemy  $|SO| = \sqrt{5}x = 4\sqrt{5} = H$  (wysokość ostrosłupa) i  $|AC| = 4x = 16$ .

Objętość ostrosłupa jest równa  $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |AC|^2 \cdot H = \frac{1}{6} \cdot 16^2 \cdot 4\sqrt{5} = \frac{512\sqrt{5}}{3}$ .

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający:

- zapisze zależność pomiędzy długością krawędzi  $a$  podstawy oraz wysokością  $H$  ostrosłupa:  $\frac{a\sqrt{2}}{2H} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

albo

- zapisze zależność pomiędzy długością krawędzi  $a$  podstawy oraz wysokością  $H$  ostrosłupa:  $H^2 + \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2 = 12^2$ ,

albo

- zapisze zależność  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,

albo

- zapisze zależność  $\frac{|AO|}{|SO|} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,

albo

- zapisze zależność  $|AO|^2 + |SO|^2 = 12^2$ ,

albo

- wprowadzi oznaczenia:  $|AO| = 2x$ ,  $|SO| = \sqrt{5}x$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający:

- zapisze dwa równania z niewiadomymi  $a$  oraz  $H$ , np.:  $H^2 + \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2 = 12^2$  oraz

$$\frac{a\sqrt{2}}{2H} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

albo

- zapisze równanie trygonometryczne, w którym wystąpi jedna funkcja trygonometryczna, np.:  $\left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$ ,

albo

- zapisze równanie  $(2x)^2 + (\sqrt{5}x)^2 = 12^2$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 p.

Zdający obliczy

- wysokość ostrosłupa:  $H = 4\sqrt{5}$

albo

- długość krawędzi podstawy ostrosłupa:  $a = 8\sqrt{2}$ ,

albo

- długość przekątnej podstawy ostrosłupa:  $|AC| = 16$ ,

albo

- współczynnik proporcjonalności:  $x = 4$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie prawie pełne** ..... 4 p.

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa:  $H = 4\sqrt{5}$  oraz długość

- krawędzi podstawy ostrosłupa:  $a = 8\sqrt{2}$

lub

- przekątnej podstawy ostrosłupa:  $|AC| = 16$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne** ..... 5 p.

Zdający obliczy objętość ostrosłupa:  $V = \frac{512\sqrt{5}}{3}$ .

**Uwagi**

1. Jeśli zdający popełni błędy rachunkowe lub przy przepisywaniu, które nie przekreślają poprawności rozumowania i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej **4 punkty**.
2. Jeżeli zdający błędnie interpretuje kąt między krawędzią boczną i wysokością tego ostrosłupa, to otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający przyjmuje, że krawędź podstawy ostrosłupa jest równa 12, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
4. Akceptujemy poprawne przybliżenia liczb rzeczywistych.
5. Jeżeli jedynym błędem jest:
  - a) niepoprawne wyznaczenie długości przekątnej kwadratu, ale niebędące skutkiem ujawnionego błędu rachunkowego,
  - b) niepoprawne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa,to zdający może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie popełnia innych błędów i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca.
6. Jeżeli zdający popełnia jeden błąd, opisany w uwadze 5. a ponadto popełnia błędy rachunkowe, ale poprawnie realizuje strategię rozwiązania, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.
7. Jeśli zdający obliczy  $x = 4$  i zapisze objętość ostrosłupa w zależności od  $x$ , ale nie poda wyniku liczbowego, to otrzymuje **4 punkty**.