CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

# EGZAMIN MATURALNY
# W ROKU SZKOLNYM 2017/2018

**FORMUŁA OD 2015**
**„NOWA MATURA"**
**i**
**FORMUŁA DO 2014**
**„STARA MATURA"**

# MATEMATYKA
## POZIOM PODSTAWOWY

## ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1

**SIERPIEŃ 2018**

## Egzaminatorze!

- Oceniaj prace zdających uczciwie i z zaangażowaniem.
- **Stosuj przyjęte zasady oceniania w sposób obiektywny**. Pamiętaj, że każda merytorycznie poprawna odpowiedź, spełniająca warunki określone w poleceniu, musi zostać pozytywnie oceniona, nawet jeżeli nie została przewidziana w przykładowych odpowiedziach w zasadach oceniania.
- Konsultuj niejednoznaczne rozwiązania zadań z innymi egzaminatorami lub przewodniczącym zespołu egzaminatorów. W przypadku niemożności osiągnięcia wspólnego stanowiska, rozstrzygajcie na korzyść zdającego.
- Przyznając punkty, nie kieruj się emocjami.
- Informuj przewodniczącego o wszystkich nieprawidłowościach zaistniałych w trakcie oceniania, w tym podejrzeń o niesamodzielność w pisaniu pracy.

# Klucz punktowania zadań zamkniętych

| Nr zad. | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** | **21** | **22** | **23** | **24** | **25** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Odp. | B | A | A | D | B | B | C | C | D | D | A | D | A | B | C | A | B | C | D | A | D | D | B | C | C |

# Schemat oceniania zadań otwartych

## Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $x^2 + 6x - 16 < 0$.

**Przykładowe rozwiązanie**
Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

**Pierwszy etap** to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $x^2 + 6x - 16$.

**Drugi etap** to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej.

Pierwszy etap rozwiązania może zostać zrealizowany następująco:
- obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 + 6x - 16$
  - obliczamy wyróżnik tego trójmianu:
    $\Delta = 36 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 100$ i stąd $x_1 = \frac{-6-10}{2} = -8$ oraz $x_2 = \frac{-6+10}{2} = 2$

  albo
  - stosujemy wzory Viète'a:
    $x_1 \cdot x_2 = -16$ oraz $x_1 + x_2 = -6$, stąd $x_1 = -8$ oraz $x_2 = 2$.

Drugi etap rozwiązania:
Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $(-8, 2)$ lub $x \in (-8, 2)$.

**Schemat punktowania**
**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................ **1 p.**
gdy:
- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = -8$ i $x_2 = 2$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x) = x^2 + 6x - 16$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo
- realizując pierwszy etap popełni błędy, ale obliczy dwa różne pierwiastki trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionych błędów wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności.

**Zdający otrzymuje** ……………………………………………………………………… **2 p.**
gdy:
- poda zbiór rozwiązań nierówności: $(-8, 2)$ lub $x \in (-8, 2)$, lub $x > -8 \wedge x < 2$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów


**Uwagi**

1. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy obliczony wyróżnik $\Delta$ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci: $x < 2$ lub $x > -8$, $x < 2$ oraz $x > -8$, itp.
4. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = -8$, $x_2 = 2$ i błędnie zapisze odpowiedź, np. $x \in (8, 2)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający po rozwiązaniu nierówności zapisuje w odpowiedzi, jako zbiór rozwiązań, zbiór, zawierający elementy nienależące do rzeczywistego zbioru rozwiązań lub zbiór pusty, to otrzymuje **1 punkt**. Zapisanie w miejscu przeznaczonym na odpowiedź pierwiastków trójmianu kwadratowego nie jest traktowane jak opis zbioru rozwiązań.

**Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \in (2, -8)$ lub $(2, -8)$, to przyznajemy **2 punkty**.

## Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż równanie $(x^3 + 27)(x^2 - 16) = 0$.

**Przykładowe rozwiązanie**

Lewa strona równania jest iloczynem dwóch czynników $x^3 + 27$ oraz $x^2 - 16$. Zatem iloczyn ten jest równy 0, gdy co najmniej jeden z tych czynników jest równy 0, czyli $x^3 + 27 = 0$ lub $x^2 - 16 = 0$.

Rozwiązaniem równania $x^3 + 27 = 0$ jest $x = \sqrt[3]{-27} = -3$.

Równanie $x^2 - 16 = 0$ doprowadzamy do postaci iloczynowej $(x-4)\cdot(x+4) = 0$.

Przynajmniej jeden z czynników $x - 4$ lub $x + 4$ jest równy 0, czyli $x = 4$ lub $x = -4$.

Wszystkie rozwiązania równania $(x^3 + 27)(x^2 - 16) = 0$,
to $x = -3$ lub $x = 4$, lub $x = -4$.

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 1 p.**

gdy:

- zapisze dwa równania $x^3 + 27 = 0$ i $x^2 - 16 = 0$

albo

- wyznaczy poprawnie (lub poda) rozwiązania jednego z równań: $x^3+27=0$ lub $x^2-16=0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

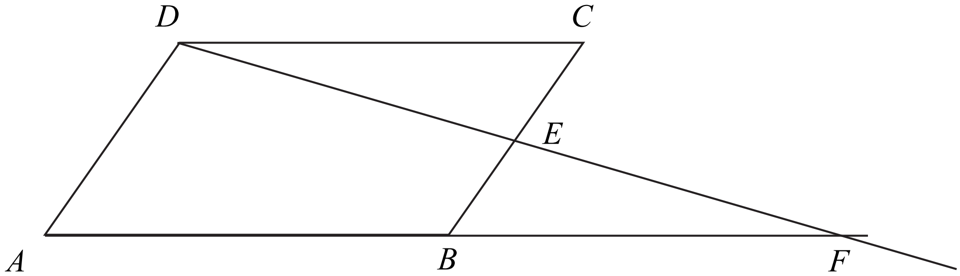
**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 2 p.**
gdy wyznaczy wszystkie rozwiązania równania: $x=-3$ lub $x=4$, lub $x=-4$.

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający poda wszystkie rozwiązania równania, bez rachunków lub uzasadnienia, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający uzyska trafne rozwiązania równania, ale w wyniku błędnej metody, to otrzymuje **0 punktów**, o ile nie uzyska 1 punktu za zapisanie dwóch równań $x^3+27=0$ i $x^2-16=0$.
3. Jeżeli zdający poprawnie wyznaczy pierwiastki wielomianu $\left(x^3+27\right)\left(x^2-16\right)$ i poda niewłaściwą odpowiedź, np. $x\in\mathbb{R}-\{-4,-3,4\}$, to otrzymuje **1 punkt**.

**Zadanie 28. (0–2)**

W równoległoboku *ABCD* punkt *E* jest środkiem boku *BC*. Z wierzchołka *D* poprowadzono prostą przecinającą bok *BC* w punkcie *E*. Proste *AB* i *DE* przecinają się w punkcie *F* (zobacz rysunek). Wykaż, że punkt *B* jest środkiem odcinka *AF*.




**Przykładowe rozwiązania**

I sposób (podobieństwo)

Rozpatrujemy trójkąty *AFD* i *BFE*.

Kąty *DAF* i *EBF* są odpowiadające i odcinki *AD* i *BC* są równoległe, więc $|\sphericalangle DAF|=|\sphericalangle EBF|$.

Tak samo wnioskujemy, że $|\sphericalangle ADF|=|\sphericalangle BEF|$. Ponadto kąt przy wierzchołku *F* jest kątem wspólnym w obu trójkątach, więc z cechy *kkk* podobieństwa trójkątów wnioskujemy, że trójkąty *AFD* i *BFE* są podobne.

Stąd wynika proporcja

$$\frac{|AD|}{|BE|}=\frac{|AF|}{|BF|},$$

ale $|BE|=\frac{1}{2}|BC|=\frac{1}{2}|AD|$, gdyż punkt *E* jest środkiem boku *BC*.

Zatem

$$\frac{|AD|}{\frac{1}{2}|AD|}=\frac{|AF|}{|BF|},\text{ czyli } |AF|=2|BF|,$$

co należało wykazać.

<u>II sposób</u> (przystawanie)
Rozpatrujemy trójkąty $BFE$ oraz $CDE$.
1. Kąty $BEF$ i $CED$ są wierzchołkowe, więc $|\sphericalangle BEF| = |\sphericalangle CED|$.
2. Kąty $FBE$ i $DCE$ są naprzemianległe i proste $AB$ i $CD$ są równoległe, więc $|\sphericalangle FBE| = |\sphericalangle DCE|$
3. Punkt $E$ jest środkiem boku $BC$, więc $|BE| = |EC|$.
Stąd, na mocy cechy *kbk* przystawania trójkątów wnioskujemy, że trójkąty $BFE$ i $CDE$ są przystające. Zatem $|BF| = |CD|$.
Ponieważ czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, więc $|AB| = |CD|$. Z ostatnich dwóch równości wynika, że $|AB| = |BF|$, co oznacza, że punkt $B$ jest środkiem odcinka $AF$.
To należało wykazać.

**Schemat punktowania**
**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 1 p.**
gdy
- zapisze lub wykorzysta przystawanie trójkątów $BFE$ oraz $CDE$

albo
- zauważy podobieństwo trójkątów $AFD$ i $BFE$, zapisze proporcję, wynikającą z tego podobieństwa, np. $\frac{|AD|}{|BE|} = \frac{|AF|}{|BF|}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.
**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 2 p.**
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Zadanie 29. (0–2)**

Wykaż, że jeżeli $a$ i $b$ są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, to $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$.

**Przykładowe rozwiązanie**

Przekształcamy równoważnie wyrażenie $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$

i otrzymujemy

$$1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\geq 4,$$

$$\frac{a^2+b^2}{ab}\geq 2,$$

$$a^2+b^2\geq 2ab,$$

$$(a-b)^2\geq 0.$$

Ta kończy dowód.

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 1 p.**

gdy poprawnie przekształci nierówność do postaci, w której liczby $a$ i $b$ występują jedynie w wyrażeniach: $a^2$, $b^2$ i $ab$, np.: $\frac{a^2+b^2}{ab}\geq 2$ lub $a^2+b^2\geq 2ab$.

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 2 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ i na tym zakończy, to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ i zapisze, że jest ona prawdziwa dla dowolnych liczb dodatnich, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej $a^2+b^2\geq 2ab$ i zapisze, że jest ona prawdziwa dla dowolnych liczb, to otrzymuje **2 punkty**.
4. Jeżeli zdający przeprowadzi poprawne rozumowanie, które zakończy zapisaniem nierówności $(a-b)^2\geq 0$, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości $a$ i $b$, to otrzymuje **0 punktów**.
6. Jeżeli zdający w wyniku poprawnych przekształceń równoważnych otrzyma nierówność $(a+b)^2\geq 4ab$, to otrzymuje **1 punkt**.
7. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ i na tym zakończy, to otrzymuje **1 punkt**. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ i dopisze komentarz o średnich, uzasadniający jej prawdziwość dla dowolnych liczb dodatnich $a$, $b$, to otrzymuje **2 punkty**.

**Zadanie 30. (0–2)**

Dziewiąty wyraz ciągu arytmetycznego $(a_n)$, określonego dla $n \geq 1$, jest równy 34, a suma jego ośmiu początkowych wyrazów jest równa 110. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

**Przykładowe rozwiązanie**

Korzystamy ze wzoru na $n$-ty wyraz ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na $a_9$:

$$a_9 = a_1 + (9-1) \cdot r .$$

Korzystamy ze wzoru na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na $S_8$:

$$S_8 = \frac{2a_1 + (8-1) \cdot r}{2} \cdot 8 .$$

Otrzymujemy układ równań

$$34 = a_1 + 8r \text{ i } 110 = 8a_1 + 28r .$$

Stąd otrzymujemy

$$a_1 = -2, r = 4,5 .$$

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 1 p.**

gdy zapisze dwa równania z dwiema niewiadomymi $a_1$ i $r$ wynikające z zastosowania poprawnych wzorów na $n$-ty wyraz ciągu arytmetycznego i sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

np.: $34 = a_1 + 8r$ i $110 = \frac{2a_1 + 7r}{2} \cdot 8$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 2 p.**

gdy obliczy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = -2$ i obliczy różnicę ciągu: $r = 4,5$ .

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, zapisze poprawny ciąg poprzez wypisanie 8 początkowych kolejnych wyrazów i ustali, że $a_1 = -2$ i $r = 4,5$, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, wypisze co najmniej trzy kolejne wyrazy i ustali, że $a_1 = -2$ i $r = 4,5$, ale nie zapisze wszystkich 8 początkowych wyrazów ciągu, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający zapisze tylko $a_1 = -2$ i $r = 4,5$, to otrzymuje **0 punktów**.
4. Jeżeli zdający dodaje do sumy ośmiu początkowych wyrazów wyraz dziewiąty i zapisuje właściwe równanie z niewiadomą $a_1$, to otrzymuje przynajmniej **1 punkt**.

**Zadanie 31. (0–2)**

Punkty $A=(2,4)$, $B=(0,0)$, $C=(4,-2)$ są wierzchołkami trójkąta $ABC$. Punkt $D$ jest środkiem boku $AC$ tego trójkąta. Wyznacz równanie prostej $BD$.

**Przykładowe rozwiązania**

Punkt $D$ jest środkiem odcinka $AC$, więc ze wzorów na współrzędne środka odcinka otrzymujemy

$$D=\left(\frac{2+4}{2},\frac{4+(-2)}{2}\right)=(3,1)\ .$$

Pozostaje wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty $B=(0,0)$ i $D=(3,1)$.

<u>I sposób</u>

Szukane równanie ma postać $y=ax+b$. Ponieważ punkty $B$ i $D$ leżą na tej prostej, więc możemy zapisać układ równań:

$$\begin{cases} a\cdot 3+b=1 \\ a\cdot 0+b=0. \end{cases}$$

Z drugiego równania mamy $b=0$, a odejmując stronami otrzymujemy $3a=1$, czyli $a=\frac{1}{3}$.

<u>II sposób</u>

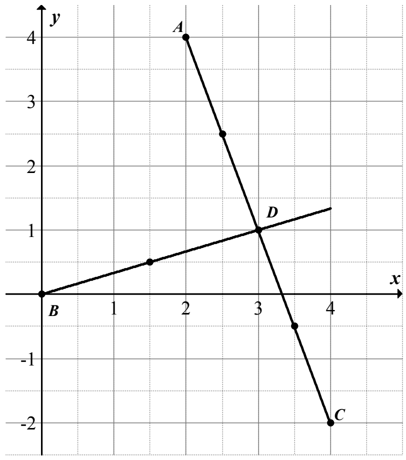
Podstawmy współrzędne punktów $D=(3,1)$ oraz $B=(0,0)$ do równania prostej, przechodzącej przez dane dwa punkty:

$$(y-1)(0-3)-(0-1)(x-3)=0\ .$$

Stąd $-3(y-1)+x-3=0$, czyli $-3y+3+x-3=0$. Zatem $y=\frac{1}{3}x$.

<u>III sposób</u>

Możemy zaznaczyć w układzie współrzędnych wierzchołki trójkąta i korzystając z punktów kratowych ustalić zależność między prostą $AC$ i prostą do niej prostopadłą przechodzącą przez środek odcinka $AC$, np. tak, jak na rysunku.




Zauważamy wówczas, że szukana prosta ma równanie $y=\frac{1}{3}x$.

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 1 p.**

gdy

- wyznaczy lub poda współrzędne środka $D$ odcinka $AC$: $D=(3,1)$

albo

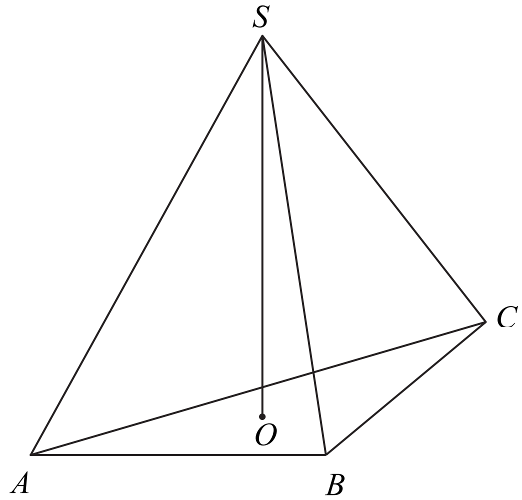
- zaznaczy w układzie współrzędnych wierzchołki trójkąta $ABC$ i zaznaczy na rysunku prostą $BD$ oraz wyznaczy lub poda współczynnik kierunkowy prostej $AC$: $-3$.

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................ **2 p.**
gdy wyznaczy równanie prostej $BD$: $y=\frac{1}{3}x$.

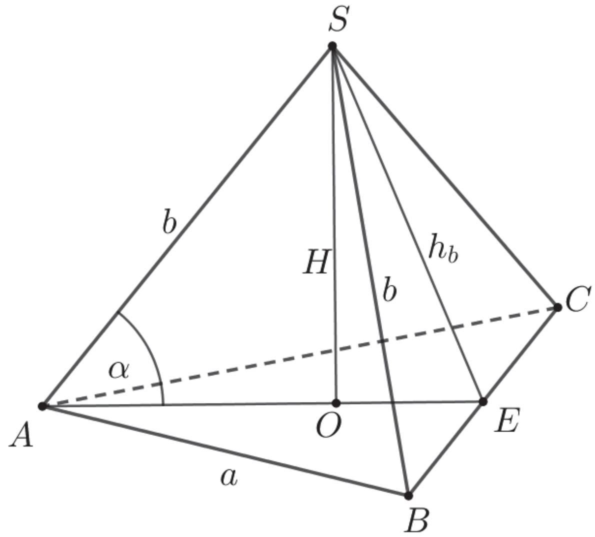
**Uwagi**

1. Jeżeli zdający wyznaczy równanie prostej prostopadłej do prostej $AC$ i przechodzącej przez punkt $B$ oraz zapisze (zaznaczy na rysunku), że trójkąt $ABC$ jest równoramienny, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający wyznaczy równanie prostej prostopadłej do prostej $AC$ i przechodzącej przez punkt $B$, ale nie zapisze (nie zaznaczy na rysunku), że trójkąt $ABC$ jest równoramienny, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający wyznacza równanie prostej prostopadłej do prostej $AC$ i przechodzącej przez punkt $B$ i popełni przy tym błąd lub nie doprowadzi rozwiązania do końca, ale zapisze (zaznaczy na rysunku), że trójkąt $ABC$ jest równoramienny, to otrzymuje **1 punkt**.

**Zadanie 32. (0–5)**
W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ krawędź podstawy ma długość $a$. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest dwa razy większe od pola jego podstawy. Oblicz cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.




**Przykładowe rozwiązanie**
Wprowadzamy oznaczenia:
$h_b$ – wysokość ściany bocznej ostrosłupa,
$\alpha$ – kąt nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy,
$E$ – środek krawędzi $BC$.




Z podanej zależności pól $2 \cdot P_p = P_b$ otrzymujemy równanie

$$2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_b,$$

skąd otrzymujemy

$$h_b = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Trójkąt $ABC$ jest równoboczny, spodek $O$ wysokości ostrosłupa jest środkiem ciężkości tego trójkąta, więc $|AE| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ oraz $|AO| = \frac{2}{3}|AE|$. Stąd

$$|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym *BES* i otrzymujemy

$$|SB| = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

Ponieważ w ostrosłupie prawidłowym krawędzie boczne mają równe długości, więc

$$|AS| = |BS| = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

Z definicji cosinusa w trójkącie prostokątnym *AOS* otrzymujemy

$$\cos\alpha = \frac{|AO|}{|AS|}.\ \cos\alpha = \frac{|AO|}{|AS|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{21}}{6}} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

Uwaga

Zamiast wyznaczać długość krawędzi bocznej może wyznaczyć, korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *OES* wysokość *SO* ostrosłupa:

$$|SO| = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a}{2}.$$

Następnie z trójkąta prostokątnego *ASO* możemy obliczyć tangens kąta $\alpha$:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{|SO|}{|AO|} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Korzystając z tożsamości trygonometrycznych możemy obliczyć cosinus kąta $\alpha$:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ oraz } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Z pierwszego równanie otrzymujemy $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$. Stąd i z drugiego równania otrzymujemy

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\frac{7}{4}\cos^2\alpha = 1,$$

$$\cos^2\alpha = \frac{4}{7}.$$

Stąd $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$, gdyż kąt $\alpha$ jest ostry.

**Schemat punktowania**
**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ........................................................................................ 1 p.**
Zdający:

- zaznaczy na rysunku kąt $\alpha$ lub zapisze $\cos\alpha = \frac{|AO|}{|AS|}$

albo

- wyznaczy długość odcinka *AO*: $|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

albo

- wyznaczy długość odcinka *EO*: $|EO| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$,

albo

- zapisze równanie z dwiema niewiadomymi $a$ i $h_b$ wynikające z zależności między polem podstawy i polem powierzchni bocznej ostrosłupa: $2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_b$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ........................................................................ 2 p.**

Zdający wyznaczy wysokość ściany bocznej ostrosłupa opuszczoną na krawędź podstawy: $h_b = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ........................................................................ 3 p.**

Zdający

- wyznaczy długość krawędzi bocznej $|AS| = \frac{a\sqrt{21}}{6}$ i nie wyznaczy długości odcinka $AO$

albo

- wyznaczy długość odcinka $AO$ i wysokość ostrosłupa: $|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $|SO| = \frac{a}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie prawie pełne ........................................................................................................ 4 p.**

Zdający:

- wyznaczy $|AS| = \frac{a\sqrt{21}}{6}$ i $|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

albo

- obliczy $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$,

albo

- obliczy $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

**Rozwiązanie pełne ...................................................................................................................... 5 p.**

Zdający obliczy wartość $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania, a jedynymi błędami w przedstawionym rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to otrzymuje **4 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełnia błąd polegający na zastosowaniu niepoprawnego wzoru na pole trójkąta równobocznego, to otrzymuje **3 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
3. Jeżeli zdający popełnia błąd merytoryczny, stosując twierdzenie Pitagorasa, to otrzymuje **3 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
4. Jeżeli zdający popełnia błąd merytoryczny, przyjmując, że punkt $O$ jest środkiem odcinka $AE$ lub przyjmie, że $|AO| = \frac{1}{3}|AE|$, to otrzymuje **3 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
5. Jeżeli zdający popełnia błąd, polegający na niewłaściwym określeniu zależności między polem podstawy a polem powierzchni bocznej, przyjmując $P_p = 2P_b$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

6. Jeżeli zdający popełnia błąd, polegający na niewłaściwym określeniu zależności między polem podstawy a polem powierzchni bocznej, przyjmując $2P_p = P_{sb}$ lub $P_p = 2P_{sb}$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
7. Jeżeli zdający błędnie interpretuje kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
8. Jeżeli zdający poprawnie rozwiązuje zadanie, oblicza $\mathrm{tg}\alpha$ lub $\sin\alpha$, a następnie podaje przybliżoną wartość cosinusa z tablic, to może otrzymać maksymalną liczbę punktów.

## Zadanie 33. (0–4)

Ze zbioru $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ losujemy liczbę $a$, natomiast ze zbioru $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ losujemy liczbę $b$. Te liczby są – odpowiednio – współczynnikiem kierunkowym i wyrazem wolnym funkcji liniowej $f(x) = ax + b$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymana funkcja $f$ jest rosnąca i ma dodatnie miejsce zerowe.

**Przykładowe rozwiązanie**

Zdarzeniem elementarnym jest uporządkowana para $(a, b)$ liczb, gdzie $a \in A$ oraz $b \in B$. Liczba $|\Omega|$ wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa

$$|\Omega| = 6 \cdot 4 = 24.$$

Niech $Z$ oznacza zdarzenie polegające na tym, że otrzymana funkcja $f$ jest rosnąca i ma dodatnie miejsce zerowe. Funkcja liniowa jest rosnąca, gdy współczynnik kierunkowy $a$ jest dodatni, więc $a \in \{1, 2, 3\}$. Rosnąca funkcja liniowa ma dodatnie miejsce zerowe tylko wówczas, gdy jej wykres przecina oś $Oy$ w punkcie o ujemnej rzędnej. Zatem współczynnik $b$ musi być równy $-1$.

Zbiór $Z$ ma więc postać

$$Z = \{(1, -1), (2, -1), (3, -1)\}.$$

Zatem liczba wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $Z$ jest równa

$$|Z| = 3.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia $Z$ jest równe:

$$P(Z) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}.$$

**Schemat punktowania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ........................................................................................................................ 1 p.**

Zdający

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 6 \cdot 4 = 24$ lub wypisze wszystkie zdarzenia elementarne

albo

- zapisze, że funkcja liniowa $f$ jest rosnąca tylko dla $a \in \{1, 2, 3\}$,

albo • zapisze, że funkcja liniowa $f$, jako funkcja rosnąca, ma dodatnie miejsce zerowe dla
$b = -1$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ........................................................................ 2 p.**

Zdający

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 6 \cdot 4$ lub wypisze wszystkie zdarzenia elementarne oraz zapisze, że funkcja liniowa $f$ jest rosnąca tylko dla $a \in \{1, 2, 3\}$

albo

- zapisze, że funkcja liniowa $f$ jest rosnąca i ma dodatnie miejsce zerowe dla $a \in \{1, 2, 3\}$ i $b = -1$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ........................................................................ **3 p.**
Zdający obliczy lub poda liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych $|\Omega| = 6 \cdot 4$ oraz

- wyznaczy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *Z*:
  ( $Z = \{(1,-1),(2,-1),(3,-1)\}$ )

albo

- zapisze, że $a \in \{1,2,3\}$, $b = -1$ oraz $|Z| = 3$.

**Rozwiązanie pełne** .................................................................................................... **4 p.**
Zdający obliczy szukane prawdopodobieństwo: $\frac{1}{8}$.

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający uzyska w wyniku końcowym liczbę spoza przedziału $\langle 0,1 \rangle$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający poda, że $|Z| = 3$ i nie zapisze zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *Z* i z rozwiązania nie można wywnioskować, które zdarzenia elementarne zdający bierze pod uwagę, ale zapisze, że $a \in \{1,2,3\}$ (albo tylko $b = -1$), to za całe rozwiązanie zdający może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający poda, że $|Z| = 3$ i nie zapisze zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *Z* i z rozwiązania nie można wywnioskować, które zdarzenia elementarne zdający bierze pod uwagę, nie zapisze, że $a \in \{1,2,3\}$ oraz nie zapisze, że $b = -1$, to za całe rozwiązanie zdający może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
4. Jeżeli zdający wypisze 3 poprawne zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *Z* i przyjmie, że takimi zdarzeniami są też inne pary postaci $(a,b)$, gdzie $a \in \{1,2,3\}$, to może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile przyjęcie tych niepoprawnych zdarzeń elementarnych jest efektem błędów rachunkowych przy obliczaniu miejsc zerowych utworzonych funkcji.
5. Jeżeli zdający wypisze 2 poprawne zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *Z* i trzecie poprawne potraktuje jako zdarzenie niesprzyjające zdarzeniu *Z*, to może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile odrzucenie tego poprawnego zdarzenia elementarnego jest efektem błędów rachunkowych przy obliczaniu miejsca zerowego utworzonej funkcji.
6. Jeżeli zdający zamiast rozważać $a > 0$ rozważa $a < 0$, to jego rozwiązanie może być ocenione tak jak w niżej wymienionych przypadkach.
   **Przypadek 6a.** Jeśli zdający, przy rozważanym $a < 0$, rozważa $b < 0$, rysuje wykres rosnącej funkcji liniowej (lub w inny sposób sygnalizuje, że rozważa funkcję rosnącą) i poprawnie oblicza $|\Omega|$, to może otrzymać **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiązuje zadanie do końca.
   **Przypadek 6b.** Jeśli zdający, przy rozważanym $a < 0$, rozważa funkcję liniową malejącą i konsekwentnie $b > 0$, a ponadto poprawnie oblicza $|\Omega|$, to może otrzymać **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiązuje zadanie do końca.
7. Jeżeli zdający rozwiązuje zadanie metodą drzewkową to może otrzymać:
   **4 punkty** – za rozwiązanie w pełni poprawne;
   **3 punkty** – za rozwiązanie, z którego jednoznacznie wynika, że zdający ustala:

$a = 1, 2, 3$ i że $a$ może być wylosowane z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, $b = -1$ i że może być wylosowane z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$;

**2 punkty** – za rozwiązanie, z którego jednoznacznie wynika, że zdający ustala:

- $a > 0$ i że może być wylosowane z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, $b < 0$ i że może być wylosowane z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$

albo

- $a = 1, 2, 3$ i $b = -1$;

**1 punkt** – za rozwiązanie, z którego jednoznacznie wynika, że zdający ustala:

- $a = 1, 2, 3$

albo

- $a > 0$ i że może być wylosowane z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$.

8. Jeżeli zdający poprawnie obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych (lub wypisze wszystkie zdarzenia elementarne) i zapisze, że funkcja liniowa $f$, jako funkcja rosnąca, ma dodatnie miejsce zerowe gdy $b = -1$, to może otrzymać **2 punkty**.

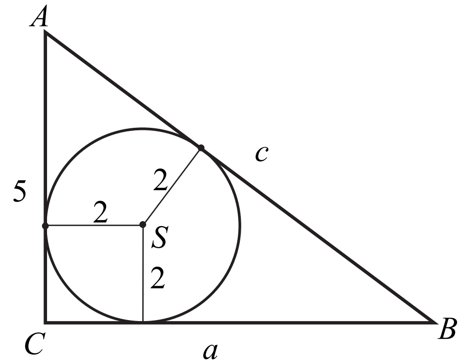
**Zadanie 34. (0–4)**

W trójkącie prostokątnym $ACB$ przyprostokątna $AC$ ma długość 5, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 2. Oblicz pole trójkąta $ACB$.

**Przykładowe rozwiązania**

<u>I sposób</u>

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.




Pole trójkąta $ACB$ możemy zapisać na dwa sposoby. Ze wzoru na pole trójkąta z podstawą i prostopadłą doń wysokością trójkąta otrzymujemy

$$P_{ACB} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot a = \frac{5}{2} a,$$

a ze wzoru na pole trójkąta z promienieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt otrzymujemy

$$P_{ACB} = p \cdot r = \frac{1}{2} \cdot \left(|AC| + |BC| + |AB|\right) \cdot r = \frac{1}{2} \cdot (5 + a + c) \cdot 2 = a + c + 5.$$

Stąd otrzymujemy

$$a + c + 5 = \frac{5}{2} a,$$

$$c = \frac{3}{2} a - 5.$$

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą

$$5^2 + a^2 = \left(\frac{3}{2} a - 5\right)^2,$$

$$25 + a^2 = \frac{9}{4} a^2 - 15a + 25,$$

$$\frac{5}{4} a^2 - 15a = 0,$$

$$\frac{5}{4} a (a - 12) = 0.$$

Stąd

$$a = 0 \text{ lub } a = 12.$$

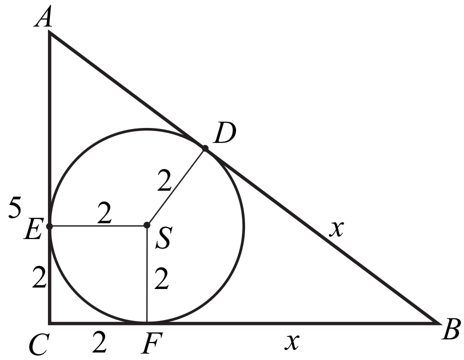
Pierwsze z otrzymanych rozwiązań nie spełnia warunków zadania, więc $a = 12$.

Pole trójkąta $ACB$ jest więc równe

$$P_{ACB} = \frac{5}{2} a = \frac{5}{2} \cdot 12 = 30.$$

<u>II sposób</u>

Poprowadźmy promienie okręgu wpisanego w trójkąt $ACB$ do punktów styczności tego okręgu z bokami tego trójkąta i przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.




Czworokąt $CFSE$ jest kwadratem o boku długości 2, gdyż kąty przy wierzchołkach $C$, $F$ i $E$ są proste, a boki $ES$ i $FS$ są równej długości. Zatem $|EC| = |FC| = 2$.

Stąd wynika, że $|AE| = |AC| - |EC| = 5 - 2 = 3$.

Oznaczmy $x = |BF|$. Zatem $|BC| = |BF| + |CF| = x + 2$.

Z twierdzenia o odcinkach stycznych otrzymujemy

$$|BD| = |BF| = x \text{ oraz } |AD| = |AE| = 3.$$

Zatem $|AB| = |AD| + |BD| = 3 + x$ .

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta $ABC$ otrzymujemy

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2,$$

$$(3+x)^2 = 5^2 + (x+2)^2,$$

$$9 + 6x + x^2 = 25 + x^2 + 4x + 4,$$

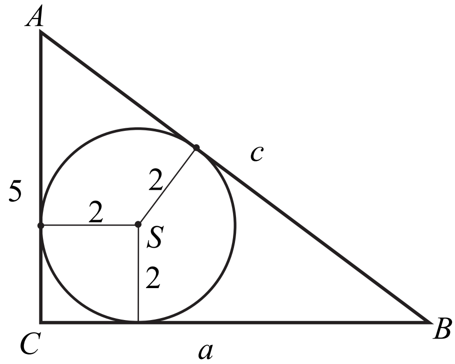
$$x = 10.$$

Przyprostokątna $AC$ ma więc długość $|BC| = x + 2 = 12$, więc pole trójkąta $ACB$ jest równe

$$P_{ACB} = \tfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30.$$

<u>III sposób</u>

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.




Ze wzoru na promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny otrzymujemy

$$2 = \tfrac{5+a-c}{2},$$

$$4 = 5 + a - c,$$

$$c = a + 1.$$

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$5^2 + a^2 = c^2.$$

Zatem

$$5^2 + a^2 = (a+1)^2,$$

$$25 + a^2 = a^2 + 2a + 1,$$

$$2a = 24,$$
$$a = 12.$$

Pole trójkąta $ACB$ równe więc równe

$$P_{ACB} = \frac{5}{2}a = \frac{5}{2} \cdot 12 = 30.$$

**Schemat punktowania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ........................................................................................................ 1 p.**

Zdający • zapisze zależność między długościami przyprostokątnej $BC$ i przeciwprostokątnej trójkąta, np.: $5^2 + a^2 = c^2$ lub $a + c + 5 = \frac{5}{2}a$ lub $2 = \frac{5+a-c}{2}$

albo

- zapisze lub zaznaczy na rysunku równości co najmniej dwóch par odpowiednich odcinków, wynikające z twierdzenia o odcinkach stycznych, np.: $|EC| = |FC|$ i $|BF| = |BD|$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ........................................................................ 2 p.**

Zdający

- zapisze układ równań pozwalający obliczyć długość przyprostokątnej $BC$, np.: ($c = \frac{3}{2}a - 5$ i $5^2 + a^2 = c^2$) lub ($2 = \frac{5+a-c}{2}$ i $5^2 + a^2 = c^2$)

albo

- zapisze długości boków $BC$ i $AB$ trójkąta $ACB$ w zależności od jednej zmiennej, np. długości $x$ odcinka $BF$: $|BC| = x + 2$, $|AB| = x + 3$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .................................................................. 3 p.**

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą prowadzące do wyznaczenia długości boków $BC$ i $AB$ trójkąta, np.: $5^2 + a^2 = \left(\frac{3}{2}a - 5\right)^2$ lub $(x+3)^2 = (x+2)^2 + 5^2$ lub $5^2 + a^2 = (a+1)^2$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne ........................................................................................................ 4 p.**

Zdający obliczy pole trójkąta $ACB$: $P_{ACB} = 30$.

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania, a jedynymi błędami w przedstawionym rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełnia błąd merytoryczny, stosując twierdzenie Pitagorasa, to otrzymuje **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
3. Jeżeli zdający popełnia błąd merytoryczny, stosując nieistniejący wzór „kwadrat sumy/różnicy = suma/różnica kwadratów", to otrzymuje **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
4. Jeżeli zdający pominie we wzorze na pole trójkąta współczynnik $\frac{1}{2}$, to otrzymuje **3 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
5. Jeżeli zdający przyjmie, że 5 to długość przyprostokątnej $BC$, to może otrzymać maksymalnie **4 punkty**, o ile poprawnie rozwiąże zadanie do końca.
6. Jeżeli zdający przyjmie, że 5 to długość przeciwprostokątnej, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**, za zapisanie (zaznaczenie) równości odcinków stycznych.