CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2016/2017

FORMUŁA OD 2015
(„NOWA MATURA")

MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1

CZERWIEC 2017

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zad	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
Odp.	A	C	D	D	B	B	C	C	A	C	D	C	B	B	D	B	B	D	A	D	B	C	A	A	A

Zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $\left(x-\frac{1}{2}\right)x > 3\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$.

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą (3.5).

Przykładowe rozwiązanie
Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.
Pierwszy etap polega na wyznaczeniu pierwiastków trójmianu kwadratowego.
Drugi etap polega na zapisaniu zbioru rozwiązań nierówności.

Realizacja pierwszego etapu
I sposób
Zapisujemy nierówność w postaci równoważnej $-2x^2+\frac{1}{2}>0$.

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $-2x^2+\frac{1}{2}$. Możemy to zrobić na kilka sposobów:

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:
  $\Delta = 0^2-4\cdot(-2)\cdot\frac{1}{2}=4$ i stąd $x_1=\frac{0-2}{-4}=\frac{1}{2}$ oraz $x_2=\frac{0+2}{-4}=-\frac{1}{2}$

albo

- stosujemy wzory Viète’a:
  $x_1\cdot x_2=-\frac{1}{4}$ oraz $x_1+x_2=0$, stąd $x_1=-\frac{1}{2}$ oraz $x_2=\frac{1}{2}$

albo

- zapisujemy postać iloczynową trójmianu $-2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$, z której odczytujemy pierwiastki: $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}$.

Uwaga
Postać iloczynową możemy też otrzymać, zauważając, że po obu stronach nierówności występuje ten sam czynnik $\left(x-\frac{1}{2}\right)$. Wtedy nierówność możemy przekształcić równoważnie

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left[x-3\left(x+\frac{1}{3}\right)\right]>0,$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)(-2x-1)>0.$$

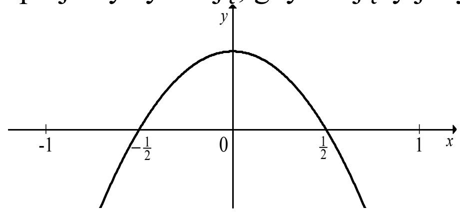
II sposób
Przekształcamy nierówność do postaci równoważnej $x^2<\frac{1}{4}$, a następnie korzystamy z własności wartości bezwzględnej, otrzymując $|x|<\frac{1}{2}$. Zaznaczamy na osi liczbowej te liczby x, które są oddalone od 0 o $\frac{1}{2}$: $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}$.

Realizacja drugiego etapu
Zapisujemy zbiór rozwiązań nierówności: $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ lub $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ lub $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$.

Schemat punktowania rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania, czyli obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności.
  Uwaga
  Akceptujemy sytuację, gdy zdający jedynie zaznaczy oba pierwiastki na osi liczbowej,

np. 

lub 

albo

- realizując pierwszy etap popełni błędy (ale otrzyma dwa różne pierwiastki, a wyznaczony wyróżnik trójmianu kwadratowego jest dodatni) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np.
  - popełni błędy rachunkowy przy przekształcaniu nierówności, przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionych błędów rozwiąże nierówność,
  - błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète'a, np.: $x_1+x_2=-2$ i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność,
  - błędnie zapisze nierówność, np. $|x|>\frac{1}{2}$ i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy:

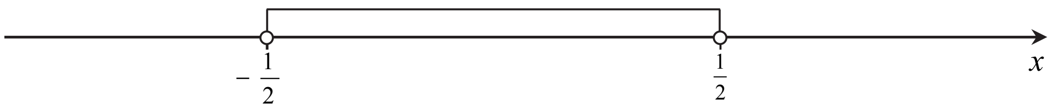
- poda zbiór rozwiązań nierówności: $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ lub $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, lub ($x>-\frac{1}{2}$ i $x<\frac{1}{2}$)

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x > -\frac{1}{2}$, $x < \frac{1}{2}$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Uwaga

Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$ i zapisze, np. $x \in \left(-2, \frac{1}{2}\right)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 27. (0–2)

Kąt α jest ostry i spełniona jest równość $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6. Trygonometria. Zdający stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ oraz $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ (6.4).

Przykładowe rozwiązanie

Ponieważ obie strony równości $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$ są liczbami dodatnimi, więc po podniesieniu obu stron do kwadratu otrzymamy równość równoważną

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{7}{4}.$$

Stąd $2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{3}{4}$. Z drugiej strony w zadaniu należy obliczyć wartość wyrażenia

$$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Otrzymujemy zatem $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy

- zapisze, że równość $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$ jest równoważna równości $2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{3}{4}$

albo

- zapisze, że $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy obliczy i zapisze, że $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \frac{1}{4}$.

Rozwiązanie (II sposób)

Z podanej równości $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$ wyznaczamy $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2} - \cos\alpha$ i podstawiamy do tożsamości $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Otrzymujemy równanie

$$\left(\frac{\sqrt{7}}{2} - \cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1,$$

czyli

$$\frac{7}{4} - \sqrt{7}\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 1.$$

Rozwiązujemy zatem równanie kwadratowe

$$2\cos^2\alpha - \sqrt{7}\cos\alpha + \frac{3}{4} = 0.$$

Wyróżnik trójmianu stojącego po lewej stronie równania jest równy

$$\Delta = 7 - 4\cdot 2\cdot\frac{3}{4} = 1.$$

Stąd wynika, że równanie ma dwa rozwiązania $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}+1}{4}$ oraz $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$. Oba rozwiązania są liczbami dodatnimi i mniejszymi od jedności.

Jeśli $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}+1}{4}$, to $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{7}+1}{4} = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$.

Jeśli $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$, to $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{7}-1}{4} = \frac{\sqrt{7}+1}{4}$

Zatem, w pierwszej sytuacji

$$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}-1}{4} - \frac{\sqrt{7}+1}{4}\right)^2 = \left(\frac{-2}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

A w sytuacji drugiej

$$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}+1}{4} - \frac{\sqrt{7}-1}{4}\right)^2 = \left(\frac{2}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania
Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy

- rozwiąże równanie $2\cos^2\alpha - \sqrt{7}\cos\alpha + \frac{3}{4} = 0$:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}+1}{4} \text{ oraz } \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$$

albo

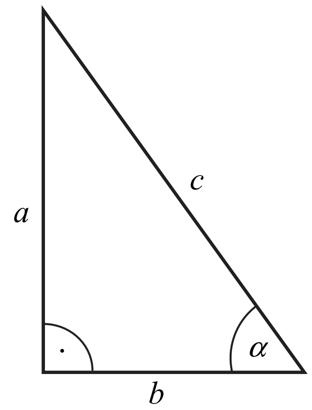
- rozwiąże równanie

$$2\sin^2\alpha-\sqrt{7}\sin\alpha+\frac{3}{4}=0 \text{ dla } \sin\alpha=\frac{\sqrt{7}+1}{4} \text{ oraz } \sin\alpha=\frac{\sqrt{7}-1}{4}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy obliczy i zapisze, że $\left(\sin\alpha-\cos\alpha\right)^2=\frac{1}{4}$.

Rozwiązanie (III sposób)
Rysujemy trójkąt prostokątny, oznaczamy długości jego boków oraz miarę kąta ostrego (zobacz rysunek).



Zauważamy najpierw, że równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa $a^2+b^2=c^2$ można zapisać w postaci równoważnej

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1.$$

Podaną w treści zadania równość $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{2}$ zapisujemy w postaci $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{7}}{2}$ i podnosimy obie jej strony (są to liczby dodatnie) do potęgi drugiej. Otrzymujemy równość równoważną

$$\frac{a^2}{c^2}+2\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{7}{4},$$

czyli, po uwzględnieniu równości $\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1$, równość

$$2\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}=\frac{3}{4}.$$

Z drugiej strony $\left(\sin\alpha-\cos\alpha\right)^2=\left(\frac{a}{c}-\frac{b}{c}\right)^2=\frac{a^2}{c^2}-2\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}+\frac{b^2}{c^2}=1-2\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}$.

Zatem $\left(\sin\alpha-\cos\alpha\right)^2=1-2\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.

Schemat punktowania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy

- skorzysta z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym i zapisze, że równość $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{7}}{2}$ jest równoważna równości $2\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}=\frac{3}{4}$

albo

- zapisze, że $\left(\sin\alpha-\cos\alpha\right)^2=1-2\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}$

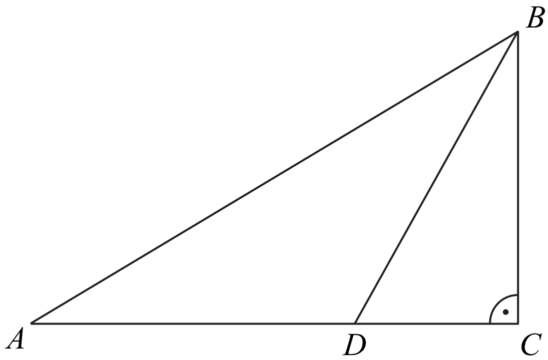
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy obliczy i zapisze, że $\left(\sin\alpha-\cos\alpha\right)^2=\frac{1}{4}$.

Zadanie 28. (0–2)

Dwusieczna kąta ostrego *ABC* przecina przyprostokątną *AC* trójkąta prostokątnego *ABC* w punkcie *D*.

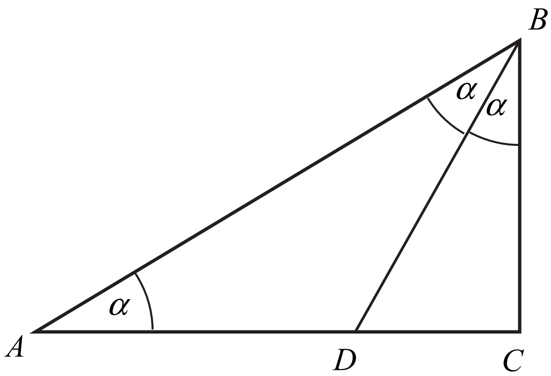


Udowodnij, że jeżeli $|AD|=|BD|$, to $|CD|=\frac{1}{2}\cdot|BD|$.

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych (7.4).

Przykładowe rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trójkąt ACB jest prostokątny i odcinek BD zawiera się w dwusiecznej kąta ostrego ABC. Stąd wynika, że $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DBA| = \alpha$. Z równości $|AD| = |BD|$ wynika, że trójkąt ADB jest równoramienny, więc $|\sphericalangle DBA| = |\sphericalangle ADB| = \alpha$.
Suma kątów ostrych w trójkącie prostokątnym jest równa $90°$, zatem $3\alpha = 90°$, a stąd $\alpha = 30°$. Wynika stąd, że trójkąt prostokątny CBD jest połową trójkąta równobocznego, a z własności tego trójkąta wynika, że $|CD| = \frac{1}{2} \cdot |BD|$, co należało wykazać.

Uwaga
Możemy też zauważyć, że $\frac{|CD|}{|BD|} = \sin\alpha = \sin 30° = \frac{1}{2}$, skąd $|CD| = \frac{1}{2} \cdot |BD|$.

Schemat punktowania rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy wywnioskuje, że $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DBA|$ oraz $|\sphericalangle DBA| = |\sphericalangle DAB|$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 29. (0–2)
Wykaż, że prawdziwa jest nierówność

$$(1,5)^{100} < 6^{25}.$$

V. Rozumowanie i argumentacja.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje podstawowe własności potęg (1.5).

Przykładowe rozwiązanie (I sposób)
Nierówność powyższą zapisujemy w postaci równoważnej

$$\left((1,5)^4\right)^{25} < 6^{25}.$$

Wystarczy zatem pokazać, że $(1,5)^4 < 6$. Zauważamy, że $(1,5)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} = 5\frac{1}{16} < 6$.
A to kończy dowód.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania
Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze nierówność w postaci równoważnej $\left((1,5)^4\right)^{25} < 6^{25}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy przeprowadzi pełne poprawne rozumowanie.

Rozwiązanie (II sposób)

Nierówność powyższą zapisujemy w postaci równoważnej $\left(\frac{3}{2}\right)^{100} < 6^{25}$.

Zatem $\frac{3^{100}}{2^{100}} < 2^{25} \cdot 3^{25}$.

Ponieważ $2^{100} > 0$ i $3^{25} > 0$, więc po pomnożeniu obu stron powyższej nierówności przez $\frac{2^{100}}{3^{25}}$ otrzymujemy nierówność równoważną

$$3^{75} < 2^{125}.$$

Mamy zatem

$$\left(3^3\right)^{25} < \left(2^5\right)^{25}, \text{ czyli } 27^{25} < 32^{25}.$$

To kończy dowód, bo $27 < 32$.

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy przekształci nierówność $(1,5)^{100} < 6^{25}$ do postaci równoważnej $3^{75} < 2^{125}$ i na tym zakończy
lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy przeprowadzi pełne, poprawne rozumowanie.

Uwagi

1. Jeżeli zdający wykonuje po prawej stronie nierówności przekształcenia z wykorzystaniem przybliżeń, np.
$$6^{25} \approx (2,45)^{50} \approx (1,57)^{100},$$
to może otrzymać maksymalnie **1 punkt**.
2. Zdający może próbować zapisać prawą stronę nierówności w postaci potęgi o wykładniku równym 100. Może wtedy skorzystać równości zawierających ułamki okresowe:
$$\tfrac{8}{3} = \tfrac{3}{2} \cdot 1,(7) \quad \text{oraz} \quad 1,(7) = \tfrac{3}{2} \cdot 1,(185).$$

Zadanie 30. (0–2)

Suma trzydziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, jest równa 30. Ponadto $a_{30} = 30$. Oblicz różnicę tego ciągu.

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3).

Przykładowe rozwiązanie

Zapisujemy wzór na sumę 30 początkowych wyrazów ciągu (a_n) z wykorzystaniem danych w zadaniu

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, zatem

$30 = \frac{a_1 + 30}{2} \cdot 30$

$\frac{a_1 + 30}{2} = 1$

$a_1 + 30 = 2$

$a_1 = -28$

Ponieważ $a_{30} = 30$ mamy

$30 = a_1 + 29r$ stąd

$30 = -28 + 29r$

$58 = 29r$

$r = 2$

Różnica ciągu (a_n) jest równa 2.

Schemat punktowania rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy obliczy wyraz pierwszy ciągu (a_n): $a_1 = -28$.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy różnice ciągu (a_n): $r = 2$.

Zadanie 31. (0–2)

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ losujemy bez zwracania dwa razy po jednej liczbie. Wylosowane liczby tworzą parę (a, b), gdzie a jest wynikiem pierwszego losowania, b jest wynikiem drugiego losowania. Oblicz, ile jest wszystkich par (a, b) takich, że iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą parzystą.

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3).

Przykładowe rozwiązanie (I sposób)

W zbiorze $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ jest siedem liczb parzystych i osiem nieparzystych.

Losujemy bez zwracania dwa razy po jednej liczbie. Z wylosowanych liczb tworzymy pary. W wyniku losowania możemy otrzymać:

- obie wylosowane liczby są parzyste; takich par jest $7 \cdot 6 = 42$,
- jedna z wylosowanych liczb jest parzysta, a druga nieparzysta; takich par jest $8 \cdot 7 + 7 \cdot 8 = 112$,
- obie wylosowane liczby są nieparzyste; takich par jest $7 \cdot 8 = 56$.

Iloczyn dwóch liczb jest liczbą parzystą, gdy co najmniej jedna z nich jest parzysta. Zatem par liczb (a, b), wylosowanych ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$, których iloczyn jest liczbą parzystą jest $42 + 112 = 154$.

Rozwiązanie (II sposób)

W zbiorze $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ jest siedem liczb parzystych i osiem nieparzystych. Losujemy bez zwracania dwa razy po jednej liczbie. Z wylosowanych liczb tworzymy pary (a, b). Szukamy tych par, których iloczyn składników jest liczbą parzystą.

Zatem:

- wybieramy te pary (a, b), w których pierwsza z wylosowanych liczb jest parzysta, a druga nieparzysta; takich par jest $7 \cdot 8 = 56$,
- wybieramy te pary (a, b), w których jedna wylosowana liczba jest parzysta, a druga jest liczbą ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$, różną od pierwszej liczby z tej pary; takich par jest $7 \cdot 7 \cdot 2 = 98$.

Zatem par liczb (a, b), wylosowanych ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$, których iloczyn jest liczbą parzystą jest $56 + 98 = 154$.

Uwaga

Zbiór wszystkich utworzonych par lub tylko par odpowiadających warunkom zadania możemy też zapisać w tabeli, gdzie symbol ☺, użyty w tabeli, oznacza parę liczb, której iloczyn jest liczbą parzystą.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1		☺		☺		☺		☺		☺		☺		☺	
2	☺		☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
3		☺		☺		☺		☺		☺		☺		☺	
4	☺	☺	☺		☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
5		☺		☺		☺		☺		☺		☺		☺	
6	☺	☺	☺	☺	☺		☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
7		☺		☺		☺		☺		☺		☺		☺	
8	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺		☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
9		☺		☺		☺		☺		☺		☺		☺	
10	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺		☺	☺	☺	☺	☺
11		☺		☺		☺		☺		☺		☺		☺	
12	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺		☺	☺	☺
13		☺		☺		☺		☺		☺		☺		☺	
14	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺		☺
15		☺		☺		☺		☺		☺		☺		☺	

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ....1 p.
gdy:

- wyznaczy liczbę par, w których obie wylosowane liczby są parzyste: $7 \cdot 6 = 42$

albo

- zaznaczy w tabeli lub wypisze wszystkie pary utworzone z liczb parzystych i poda ich ilość: 42

albo

- wyznaczy liczbę par, w których wylosowano liczbę parzystą i nieparzystą: $2 \cdot 7 \cdot 8 = 112$

albo

- zaznaczy w tabeli lub wypisze wszystkie pary, w których jedna z liczb jest liczbą parzystą, a druga nieparzystą, i poda ich ilość: 112

albo

- wyznaczy liczbę par, w których wylosowano jako pierwszą liczbę parzystą, a jako drugą nieparzystą (albo pierwszą nieparzystą, a drugą parzystą): $7 \cdot 8 = 56$ (albo $8 \cdot 7 = 56$

albo

- wyznaczy liczbę par, w których jedna wylosowana liczba jest parzysta, a druga jest liczbą ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$, różną od pierwszej liczby z tej pary; takich par jest $7 \cdot 7 \cdot 2 = 98$.

Zdający otrzymuje...2 p.
gdy wyznaczy liczbę par, w których iloczyn składników jest liczbą parzystą: 154.

Uwaga
Jeżeli zdający wypisze lub zaznaczy w tabeli wszystkie pary liczb spełniające warunki zadania, ale pominie jeden z elementów przy zliczaniu (na jakimkolwiek etapie rozwiązania) i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje 1 punkt.

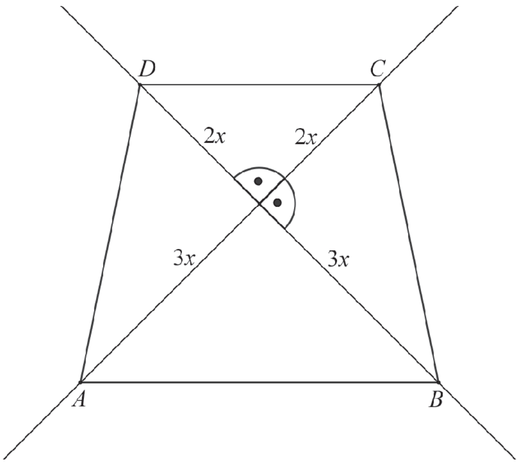
Zadanie 32. (0–4)

Ramię trapezu równoramiennego $ABCD$ ma długość $\sqrt{26}$. Przekątne w tym trapezie są prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je w stosunku $2:3$. Oblicz pole tego trapezu.

III. Modelowanie matematyczne.	G10. Figury płaskie. Zdający stosuje twierdzenie Pitagorasa (G10.7). 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą (3.4).

Przykładowe rozwiązanie (I sposób)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Przekątne w trapezie są prostopadłe i dzielą się w stosunku $2:3$, zatem pole trapezu to suma dwóch trójkątów: o wysokości $2x$ i podstawie $5x$ oraz o wysokości $3x$ i podstawie $5x$.
Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość przekątnych trapezu.

$(2x)^2 + (3x)^2 = 26$

$4x^2 + 9x^2 = 26$

$13x^2 = 26$

Stąd $x^2 = 2$. Zatem $x = \sqrt{2}$.

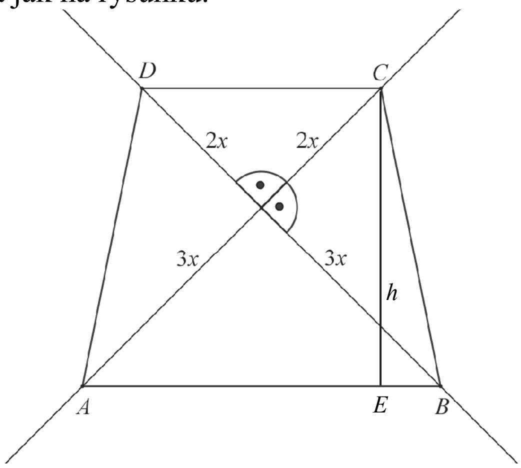
Przekątne maja długość $5\sqrt{2}$.

Obliczamy pole trapezu

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 25 .$$

Rozwiązanie (II sposób)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Przekątne w trapezie są prostopadłe i dzielą się w stosunku $2:3$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość przekątnych trapezu.

$(2x)^2 + (3x)^2 = 26$

$4x^2 + 9x^2 = 26$

$13x^2 = 26$

Stąd $x^2 = 2$. Zatem $x = \sqrt{2}$.

Przekątne mają długość $5\sqrt{2}$.

Wyznaczamy długości podstaw i wysokość trapezu, korzystając z twierdzenia Pitagorasa. Ponieważ

$|AB| = \sqrt{2\cdot\left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{36} = 6$, $|CD| = \sqrt{2\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$ i $|EB| = \dfrac{|AB|-|CD|}{2} = 2$ oraz

$|BC| = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{26}$.

Zatem $h = \sqrt{\left(\sqrt{26}\right)^2 - \left(\dfrac{6-4}{2}\right)^2} = 5$, więc pole trapezu jest równe $P = \dfrac{6+4}{2}\cdot 5 = 25$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający zapisze długości przekątnych (lub ich odcinków) w zależności od jednej zmiennej, np.: $5x$, lub odcinków $2x$ i $3x$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający obliczy x: $x = \sqrt{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający

- zapisze pole trapezu jako funkcję jednej zmiennej, np.: $P = \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 5x + \frac{1}{2}\cdot 3x\cdot 5x$

albo

- obliczy długość przekątnych trapezu : $5\sqrt{2}$,

albo

- obliczy długości podstaw oraz wysokość trapezu: $|AB| = 6$, $|CD| = 4$, $h = 5$.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający obliczy pole trapezu: $P = 25$.

Zadanie 33. (0–4)

Punkty $A = (-2, -8)$ i $B = (14, -8)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AB| = |AC|$. Wysokość AD tego trójkąta jest zawarta w prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x - 7$. Oblicz współrzędne wierzchołka C tego trójkąta.

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt (8.3). Zdający oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych (8.4).

Przykładowe rozwiązanie (I sposób)

Niech $C = (x, y)$. Ponieważ prosta AD jest wysokością trójkąta ABC, więc podstawa BC jest zawarta w prostej prostopadłej do prostej AD. Prosta BC jest więc określona równaniem postaci

$$y = -2x + b.$$

Ponieważ punkt B leży na prostej BC, więc otrzymujemy równość

$$-8 = -28 + b, \text{ skąd wynika, że } b = 20.$$

Proste AD i BC przecinają się w punkcie D, więc współrzędne tego punktu są rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} y = -2x + 20 \\ y = \frac{1}{2}x - 7 \end{cases}$$

Rozwiązujemy ten układ równań i otrzymujemy $D = \left(\frac{54}{5}, -\frac{8}{5}\right)$. Ponieważ punkt D jest środkiem odcinka BC, więc jego współrzędne spełniają równania

$$\frac{x+14}{2} = \frac{54}{5} \text{ i } \frac{y-8}{2} = -\frac{8}{5},$$

gdzie x i y to współrzędne punktu C. Rozwiązujemy obydwa równania i otrzymujemy odpowiedź

$$C = \left(\frac{38}{5}, \frac{24}{5}\right).$$

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania
Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 p.
Zdający wyznaczy równanie prostej, w której zawarty jest podstawa BC tego trójkąta

$$y = - \quad x + 20 \qquad\qquad 2$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.
Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający zapisze układ równań pozwalający obliczyć współrzędne punktu D

$$y = -2x + 20 \text{ i } y = \frac{1}{2}x - 7$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania……………………………………………..3 p.
Zdający obliczy współrzędne punktu D

$$D = \left(\frac{54}{5}, -\frac{8}{5}\right)$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne ……………………………………………………………………..4 p.
Zdający obliczy współrzędne szukanego wierzchołka C tego trójkąta

$$C = \left(\frac{38}{5}, \frac{24}{5}\right).$$

Uwaga
Jeśli zdający rozpatruje trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$ albo zakłada, że $|\sphericalangle BAC| = 90°$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Rozwiązanie (II sposób)
Zbudujemy układ równań: okrąg o środku w punkcie A i promieniu $|AB|$ oraz prosta BC.
Rozwiązaniem tego układu są dwa punkty: dany punkt B oraz szukany punkt C. Ponieważ promień $|AB|$ tego okręgu jest równy 16, więc równanie okręgu jest następujące:

$$(x+2)^2 + (y+8)^2 = 16^2.$$

Prosta AD jest wysokością trójkąta ABC, zatem podstawa BC jest zawarta w prostej prostopadłej do prostej AD. Prosta BC jest więc określona równaniem postaci

$$y = -2x + b.$$

Ponieważ punkt B leży na prostej BC, więc otrzymujemy równość

$-8 = -28 + b$, skąd wynika, że $b = 20$.

Mamy zatem układ równań $(x+2)^2 + (y+8)^2 = 16^2$ i $y = -2x + 20$.
Po podstawieniu wyrażenia $y = -2x + 20$ do pierwszego równania w miejsce zmiennej y otrzymujemy równanie kwadratowe z jedną niewiadomą

$$(x+2)^2 + (28-2x)^2 = 16^2.$$

Wykonujemy wskazane działania i porządkujemy to równanie do postaci:

$$5x^2 - 108x + 532 = 0.$$

Wyróżnik Δ trójmianu $5x^2-108x+532$ jest dodatni i równy 1024, zatem równanie ma dwa rozwiązania:

$$x=\frac{108+32}{10}=14 \text{ i } x=\frac{108-32}{10}=\frac{76}{10}=\frac{38}{5}.$$

Jeśli $x=14$, to $y=-28+20=-8$ i to są współrzędne danego punktu B.

Jeśli $x=\frac{38}{5}$, to $y=-\frac{76}{5}+20=\frac{24}{5}$ i to są współrzędne szukanego punktu C. Zatem $C=\left(\frac{38}{5},\frac{24}{5}\right)$.

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający:

- wyznaczy równanie prostej, w której zawarta jest podstawa BC trójkąta ABC

$$y=-2x+20$$

albo

- zapisze równanie $(x+2)^2+(y+8)^2=16^2$ okręgu o środku w punkcie A i promieniu $|AB|$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ……………………………….…………..……2 p.

Zdający zapisze układ równań $(x+2)^2+(y+8)^2=16^2$ i $y=-2x+20$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania………………………………………………...3 p.

Zdający zapisze równanie kwadratowe

$$5x^2-108x+532=0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne …………………………………………………………………………..4 p.

Zdający obliczy współrzędne szukanego wierzchołka C tego trójkąta

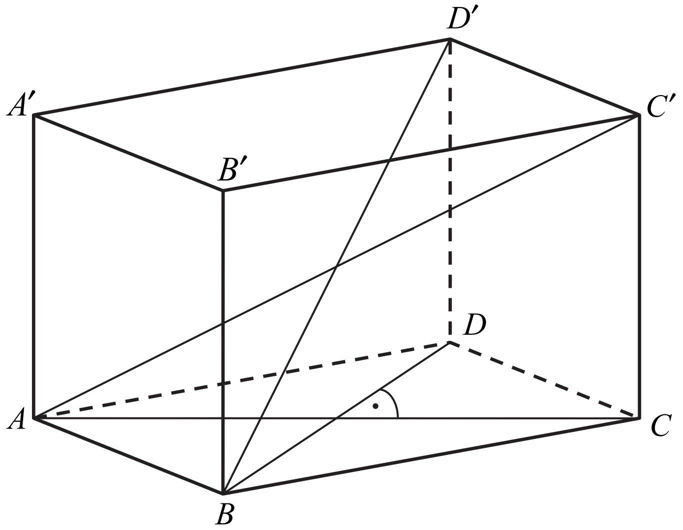
$$C=\left(\frac{38}{5},\frac{24}{5}\right).$$

Uwaga

Jeśli zdający rozpatruje trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC|=|BC|$ albo zakłada, że $|\sphericalangle BAC|=90^\circ$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 34. (0–5)

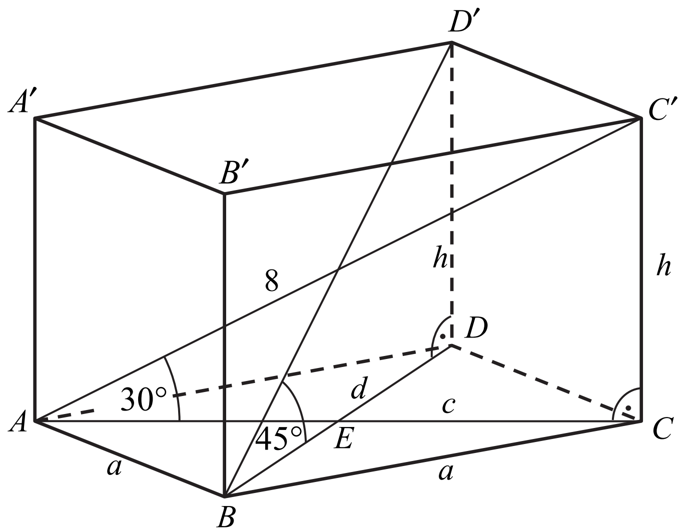
Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDA'B'C'D'$ jest romb $ABCD$. Przekątna AC' tego graniastosłupa ma długość 8 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $30°$, a przekątna BD' jest nachylona do tej płaszczyzny pod kątem $45°$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.



IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami (9.2) Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami (9.4) Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.6).

Przykładowe rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trójkąt prostokątny ACC' to połowa trójkąta równobocznego, więc

$$|AC| = \frac{|AC'|\sqrt{3}}{2} \text{ oraz } |CC'| = \frac{|AC'|}{2},$$

czyli

$$c=\frac{8\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3} \text{ oraz } h=\frac{8}{2}=4.$$

Trójkąt prostokątny BDD' to połowa kwadratu, więc $|BD|=|DD'|$, czyli

$$d=h=4.$$

Przekątne rombu są prostopadłe i punkt ich przecięcia dzieli każdą z nich na połowy. Zatem trójkąt ABE jest prostokątny, a jego przyprostokątne mają długości

$$|AE|=\frac{1}{2}c=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}=2\sqrt{3},\quad |BE|=\frac{1}{2}d=\frac{1}{2}\cdot 4=2.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABE otrzymujemy

$$|AB|^2=|AE|^2+|BE|^2,$$

$$a^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2=16.$$

Stąd $a=4$.
Pole podstawy graniastosłupa jest równe

$$P_{ABCD}=\frac{1}{2}cd=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot 4=8\sqrt{3}.$$

Ponieważ $a=h=4$, więc ściana boczna jest kwadratem o polu 16.
Zatem pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe

$$P_c=2P_{ABCD}+P_b=2\cdot 8\sqrt{3}+4\cdot 16=16\sqrt{3}+64=16\left(\sqrt{3}+4\right).$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający
- obliczy długość przekątnej AC podstawy graniastosłupa: $|AC|=4\sqrt{3}$

albo
- obliczy wysokość graniastosłupa: $h=4$

albo
- zapisze, że $|BD|=|DD'|$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający obliczy długość przekątnej BD podstawy graniastosłupa: $|BD|=4$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający obliczy pole podstawy graniastosłupa: $P_{ABCD}=8\sqrt{3}$.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 p.

Zdający obliczy
- długość krawędzi podstawy graniastosłupa: $a=4$

albo
- pole powierzchni całkowitej graniastosłupa, popełniając błędy rachunkowe.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.

Zdający obliczy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa: $P_c=16\sqrt{3}+64$.